Esercitazione 1

domenica 19 dicembre 2021 12:45

Esercizio 1

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} \quad \text{dove } a>1$$

SOL

$$\lim_{R\to+\infty} \int_a^R \frac{1}{x} = \lim_{R\to+\infty} \Big[\log(x)\Big]_a^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \big(\log(R) - \log(a)\big) = +\infty$$

Questo integrale è divergente

TEOREMA P-INTEGRALI DI PRIMO TIPO:

Sia $a>0$, si ha:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } p>1 \\ \text{diverge se } p\leq 1 \end{cases}$$

DIM

Consideriamo

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R \frac{1}{x^p}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right]$$

Si ha che:

- se $p>1 \Rightarrow 1-p<0$

Dunque

$$\lim_{R\to+\infty} \left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right] = \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

- se $p<1 \Rightarrow 1-p>0$

Dunque

$$\lim_{R\to+\infty} \left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right] = +\infty$$

$\blacksquare$

Esercizio 2

$$\int_3^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_3^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_3^{+\infty} \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx \simeq$$

$$\simeq \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{x^2}$$

Risolviamo l'integrale:

$$= \underset{R\to+\infty}{\dots\dots} x^2$$

Risolviamo l'integrale:

$$\int \frac{2x+1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \int \frac{A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x)}{x^3-x} =$$

$$= \int \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x - A}{x^3-x}$$

Cerchiamo le costanti:

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ B-C = 2 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1/2 \\ B = 3/2 \\ A = -1 \end{cases}$$

Di conseguenza si ha

$$-\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_3^R -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[-\ln(x) + \frac{3}{2}\cdot\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_3^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^{3/2}}{x(x+1)^{1/2}}\right]_3^R = \lim_{R\to+\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^{3/2}}{x\sqrt{x+1}}\right]_3^R = \lim_{R\to+\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x^2+x}}\right]_3^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\ln\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+x}}\right]_3^R = \lim_{R\to+\infty}\left[\ln\frac{\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}}\right]_3^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\frac{\frac{x-1}{x}\cdot\sqrt{x-1}}{\frac{x\sqrt{x+1}}{x}}\right]_3^R = \lim_{R\to+\infty}\left[\ln\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right]_3^R =$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left[\ln \frac{\left(1-\frac{1}{R}\right)\sqrt{R-1}}{\sqrt{R+1}} - \ln \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\sqrt{3-1}}{\sqrt{3+1}} \right] =$$

$$= - \ln \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}}{2} = - \ln \frac{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = - \ln \frac{2\sqrt{2}}{6} = - \ln \frac{\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{-1} = \ln \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Es 1

$$\int_0^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to 0^+}\left[\ln(x)\right]_R^b = \lim_{R\to +0^+}\left[\ln(b)-\ln(R)\right] = +\infty \quad \blacksquare$$

TEOREMA P-INTEGRALI DI SECONDA SPECIE

Sia $b>0$. Si ha

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } p<1 \\ \text{diverge} & \text{se } p\geq 1 \end{cases}$$

DIM

Distinguiamo tre casi:

- $p=1$
- $p>1$
- $0<p<1$

$$\Rightarrow \int_r^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{r\to 0^+}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_r^b = \lim_{r\to 0^+}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{r^{1-p}}{1-p}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<p<1 \Rightarrow 1-p>0 \Rightarrow \int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{b^{1-p}}{1-p} \\ p>1 \Rightarrow 1-p< \ \ldots \int^b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ p > 1 \Longrightarrow 1 - p < 0 \Longrightarrow \int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \right.$$

Es 2

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

Sol

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{r \to 2^-} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^r = \lim_{r \to 2^-} \left[-\frac{1}{r-2} - \left(-\frac{1}{0-2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{r \to 2^-} \left[-\frac{1}{r-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{r \to 2^-} \left[-\frac{1}{r-2} - \frac{1}{2}\right] = +\infty$$

Es 3

$$\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

Sol

$$\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-3}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$$

-3

Dato che $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge, allora diverge tutto. $\blacksquare$

Es 4

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

SOL

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{r\to 2^-} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{r\to 2^-} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} =$$

$$= \lim_{r\to 2^-} \int_0^r \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx$$

Poniamo $y = \frac{x}{2}$

$dy = \frac{1}{2}\,dx$

$$\Rightarrow \lim \int^{r/2} 1 \qquad \left[\arcsin(y)\right]^{r/2} =$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to 2^-} \int_0^{r/2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \lim_{r \to 2^-} \Big[\arcsin(y) \Big]_0^{r/2} =$$

$$= \lim_{r \to 2^-} \Big[\arcsin(r/2) - \arcsin(0) \Big] =$$

$$= \arcsin(1) - \arcsin(0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

Esercitazione 3

domenica 26 dicembre 2021 10:04

Es 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4(1+x^4)}\,dx$$

SOL

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4(1+x^4)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^8}\,dx \leq$$

$$\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^8}\,dx < +\infty$$

$\blacksquare$

Es 2

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

SOL

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

Osserviamo che

$$x^2+9 \leq x^2+x^2 \quad \text{dato che } x \in [3,+\infty)$$

Dunque si ha:

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \geq \int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x^2}}\,dx \geq$$

$$\geq \int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\,dx \geq \int_3^{+\infty} \frac{x}{x\sqrt{2}} \geq \int_3^{+\infty} \frac{3}{x\sqrt{2}} \geq$$

$$\geq \frac{3}{\sqrt{2}} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\blacksquare$

Es 3

Es 3

$$\int_1^{+\infty} 1-\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

SOL

$$\int_1^{+\infty} 1-\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Troviamo $g(x)$ t.c.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Sia dunque $g(x) = \frac{1}{2\cdot x^2}$

Questo perché in generale vale che:

$$1-\cos(a_n) \sim \frac{a_n^2}{2} \quad \text{se} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dunque

$$\int_1^{+\infty} 1-\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx$$

e si ha che $+\infty$

e si ha che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{che converge}$$

Es 4

$$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$$

SOL

$$\int_1^{+\infty} e^{-1/x}\, dx \quad \text{non converge dato che} \quad e^{-\frac{1}{x}} \not\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Es 5

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

SOL

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

Es 6

$$\int^{+\infty} \frac{\sin(e^x-1)}{\ldots}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}}$$

SOL

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}} = \int_0^{1} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}}$$

Studiamo ora i due integrali:

- $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} < +\infty$$

- $$\int_0^{1} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}}$$ notiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

  dunque $\sin(e^x-1) \sim \sin(x)$

Perciò si ha:

$$\int_0^{1} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}} \sim \int_0^{1} \frac{x}{x^{3/2}} = \int_0^{1} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}-1}} = \int_0^{1} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx < +\infty$$

Dato che entrambi gli integrali convergono, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x-1)}{x^{3/2}}\,dx < +\infty$$

$\blacksquare$

Esercitazione 4

domenica 26 dicembre 2021 14:46

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n = \frac{1}{x^n} \quad \text{in } (1, +\infty)$$

Sia $x_0 \in (1, +\infty)$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_0^n} = 0$$

Quindi $f_K \xrightarrow{P} f = 0$

Studiamo ora il

$$\sup_{x\in I} |f_K - f|$$

ossia

$$\sup_{x\in I} \left|\frac{1}{x^K} - 0\right| = \sup_{x\in I} \left|\frac{1}{x^K}\right| = 1$$

passando al limite per $K \to +\infty$ di $\sup \left|\frac{1}{x^K}\right|$ si ha

$$\lim_{K\to+\infty} \sup_{x\in I} \left|\frac{1}{x^K}\right| = \lim_{K\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Dunque $f_K \not\rightarrow f$ ▨

Esercizio 2

$$f_n = \begin{cases} -1 & \text{in } (-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{in } (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{in } [-\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

SOL

Si ha che:

$$\lim \quad f_n = \begin{cases} -1 & \text{in } (-1, 0) \end{cases}$$

si ha che:

$$\lim_{k \to +\infty} f_k = \begin{cases} -1 & \text{in } (-1, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & \text{in } (0, 1) \end{cases}$$

Per il teorema sulla continuità del limite si ha che $f_k \overset{u}{\not\longrightarrow} f$ perché f non è continua e quindi la tesi è negata.

$\blacksquare$

Esercizio 3

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

SOL

Si ha

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x) = \begin{cases} \sqrt{k} & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Sia $x \in (0, 1)$, perciò si ha:

$$f_k \xrightarrow{p} f = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Studiamo la convergenza uniforme:

Si ha

$$\sup_{x \in I} |f_k - f| = \sup_{x \in I} \left| f_k - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = \sup_{x \in (0, \frac{1}{n})} \left| \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| =$$

$= \lim \left| \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = +\infty$ (Facciamo questo perché la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è decrescente e in $(0, \frac{1}{n}$ assume il suo valore

$$= \lim_{x \to 0^+} \left| \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = +\infty$$

(facciamo questo perché la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è decrescente e in $(0, \frac{1}{n})$ assume il suo valore più grande in 0^+)

e $\lim_{n \to +\infty} +\infty = +\infty$

Per cui $f_K \not\rightrightarrows f$

$\blacksquare$

Esercitazione 5

domenica 26 dicembre 2021 17:02

Esercizio 1

Ultimo esercizio dell'esercitazione precedente

Esercizio 2

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \quad \text{in } (0,1)$$

SOL

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{1+nx} = 0$$

per cui $f_n \xrightarrow{p} f = 0$

Studiamo la convergenza assoluta, cioè

$$\sup_{x \in (0,1)} \left| \frac{x}{1+nx} \right| = \sup_{x \in (0,1)} \frac{x}{1+nx}$$

Calcoliamo $f'(x)$:

$$f'\left(\frac{x}{1+nx}\right) = \frac{1+nx-nx}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+nx)^2} \geq 0 \text{ sempre}$$

Dunque f è crescente e calcoliamo il sup in $x=1$, si ha dunque

$$\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{x}{1+nx}\right| = \sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{1}{1+n}\right| = \frac{1}{1+n}$$

Passando al limite per $n\to+\infty$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+n}=0$$

Dunque

$$f_k \xrightarrow{U} f \quad \text{in } (0,1)$$

$\blacksquare$

Esercizio 3

$$f_n(x)=\frac{1}{n}+\frac{1}{x}$$

SOL

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

Per cui

$$f_n \xrightarrow{P} f=\frac{1}{x}$$

$$f_n \xrightarrow{p} f = \frac{1}{x}$$

Vediamo ora la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\right|$$

Passando al limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dunque

$$f_n \xrightarrow{u} f = \frac{1}{x}$$

$\blacksquare$

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

ed esaminare la validità dell'uguaglianza:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$

SOL

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2x^2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{n^2x^2}{n^2}} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{se } x \neq 0$$

Per cui

$$f_n \to f = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

il limite non è continuo, dunque $f_n \not\rightrightarrows f$

Vediamo ora

- $$\int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2$$

- $$\int_{-1}^{1} \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-1+n^2x^2}{1+n^2x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} -\frac{1}{1+n^2x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} 1\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 1\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+n^2x^2} = \int_{-1}^{1} 1\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(nx)^2}$$

[Ricordiamo che se $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ si ha $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$]

$$= [x]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{n}\operatorname{arctg}(nx)\right]_{-1}^{1} = [x]_{-1}^{1} - \frac{1}{n}\left[\operatorname{arctg}(nx)\right]_{-1}^{1} =$$

$$= [1-(-1)] - \frac{1}{n}\left[\operatorname{arctg}(n) - \operatorname{arctg}(-n)\right] = 2 - \frac{1}{n}\left[\operatorname{arctg}(n) + \operatorname{arctg}(n)\right] =$$

$$= 2 - \frac{1}{n}\left[2\, \operatorname{arctg}(n)\right] = 2 - \frac{2}{n}\left[\operatorname{arctg}(n)\right] \xrightarrow{n \to +\infty} 2$$

$\boxed{}$

Esercizio 2

Sia
$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n} \qquad \text{con} \quad x \in [0,1]$$

Verificare se vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata, ossia:
$$\lim_{n \to +\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

SOL

Si ha
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x - \frac{x^n}{n} = x$$

Dunque
$$f_n \xrightarrow{P} f = x$$

Studiamo ora la convergenza uniforme:
$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n - f| = \sup_{x \in [0,1]} \left| x - \frac{x^n}{n} - x \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| -\frac{x^n}{n} \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Dunque
$$f_n \xrightarrow{U} f = x$$

Dunque
$$f_n \xrightarrow{U} f = x$$

Studiamo ora le derivate:

- $f_n'(x) = 1 - n\dfrac{x^{n-1}}{n} = 1 - x^{n-1}$
- $f'(x) = 1$

Calcoliamo ora il limite per $n \to +\infty$ di $f_n'(x)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} 1 - x^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Dunque il teorema è verificato nell'intervallo $[0,1)$ e non è verificato in $x=1$

Esercizio 3

Verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\sin(x))^n \, dx = \int_0^{\pi} \lim_{n\to+\infty} (\sin(x))^n \, dx$$

SOL

Si ha
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\sin(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e si ha che

$$\int_0^{\pi} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_0^{\pi} \lim_{n\to+\infty} (\sin(x))^n = 0 \quad \left[\begin{matrix}\text{perché } f \text{ è quasi} \\ \text{ovunque nulla}\end{matrix}\right].$$

Ci rimane da mostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\sin(x))^n\,dx \quad \text{è } 0.$$

Si ha che:

$$\int_0^{\pi} (\sin(x))^n\,dx = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} (\sin(x))^n\,dx + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2+\varepsilon} (\sin(x))^n\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} (\sin(x))^n\,dx$$

Studiamoci i tre integrali:

- $$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} (\sin(x))^n\,dx \leq \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^n dx = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^n \int_0^{\pi/2-\varepsilon} 1\,dx = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^n \left[x\right]_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$
$$= \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^n \left[\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon-0\right] = \left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^n =$$
$$= \left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\cos(\varepsilon))^n \leq \frac{\pi}{2}\cdot(\cos(\varepsilon))^n$$

- $$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2+\varepsilon} (\sin(x))^n\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} 1\,dx = \left[x\right]_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} = \left[\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon-\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right] = 2\varepsilon$$

- $$\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} (\sin(x))^n\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)^n dx = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)^n \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} 1\,dx = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)^n \left[x\right]_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} =$$
$$= (\cos(\varepsilon))^n\left[\pi-\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right] = (\cos(\varepsilon))^n\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \leq (\cos(\varepsilon))^n\cdot\frac{\pi}{2}$$

In conclusione:

$$\int_0^{\pi} (\sin(x))^n dx \leq (\cos(\varepsilon))^n \cdot \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon + \frac{\pi}{2} \cdot (\cos(\varepsilon))^n = \pi (\cos(\varepsilon))^n + 2\varepsilon$$

Passando al limite $n \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} (\sin(x))^n dx \leq \lim_{n \to +\infty} \pi \cdot (\cos(\varepsilon))^n + 2\varepsilon = 2\varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε si ha:

$$0 \leq \int_0^{\pi} (\sin(x))^n dx < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} (\sin(x))^n dx = 0$$

$\blacksquare$

Esercitazione 7

domenica 26 dicembre 2021 18:07

E, 1

Ultimo esercizio dell'esercitazione 6

E, 2

Sia $\{x_n\}$ la successione dei numeri razionali nell'intervallo $[0,1]$

Studiare la convergenza della successione definita in $[0,1]$ da:

$$f_n(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

SOL

Sia $x \in [0,1] \setminus Q \implies x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \quad \forall n \in N$

Per cui $f(x) = 0$

Sia $x \in [0,1] \cap Q \implies x \in \{x_1, \dots, x_n\}$, in particolare $x = x_{\bar{n}}$ per un certo $\bar{n} \in N$

Per cui $f(x) = 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \in N$ t.c.

$$|f_n(x) - 1| = 0 < \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\implies \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$$

Perciò

$\{1$ se $x \in [0,1] \cap Q$

Perciò

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Studiamo ora la convergenza uniforme:

Si ha

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

Dunque $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1 \neq 0$

Per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $[0,1]$

$\blacksquare$

- Serie geometrica: serie del tipo $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ [OSS: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (converge se $|x|<1$)]
- Serie armonica: serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$
- Serie armonica generalizzata: serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (converge se e solo se $p>1$)

Es 1

Si dimostri che $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx}$ converge $\forall x<0$, se ne calcoli la somma e si dica in quali intervalli si ha convergenza uniforme.

Sol

Notiamo che fissato $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx}$ è una serie geometrica,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^x)^n$$

Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^x)^n$ converge $\iff |e^x| < 1 \Rightarrow$ cioè per $x<0$

Calcoliamo la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} (e^x)^n = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1-(e^x)^{k+1}}{1-e^x} \right) = \frac{1-0}{1-e^x} =$$

$$= \frac{1}{1-e^x}$$

Studiamo la convergenza uniforme ricordando che la serie è data dalla successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{xk}$

Consideriamo quindi

$$\sup_{x\in(-\infty,0)} |S_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \sum_{k=0}^{n} e^{xk} - \frac{1}{1-e^x} \right| =$$

$$= \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} - \frac{1}{1-e^x} \right| = \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{1-e^{x(n+1)}}{1-e^x} - \frac{1}{1-e^x} \right| =$$

$$= \sup \left| \frac{1-e^{x(n+1)}-1}{\ldots} \right| = \sup \left| \frac{-e^{x(n+1)}}{\ldots} \right| = \sup \left| \frac{e^{x\cdot(n+1)}}{1-e^x} \right|$$

$$= \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{1-e^{x(n+1)}-1}{1-e^{x}} \right| = \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{-e^{x(n+1)}}{1-e^{x}} \right| = \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{e^{x\cdot(n+1)}}{1-e^{x}} \right|$$

Sia $g_n(x) \stackrel{def}{=} \dfrac{e^{x(n+1)}}{1-e^{x}}$, calcoliamo $g_n'(x)$:

$$g_n'(x) = \frac{e^{x(n+1)}\cdot(n+1)\cdot(1-e^{x}) - \left(e^{x(n+1)}\cdot(-e^{x})\right)}{(1-e^{x})^2} =$$

$$= \frac{(n+1)(1-e^{x})\,e^{x(n+1)} + e^{x}\cdot e^{x(n+1)}}{(1-e^{x})^2} =$$

$$= \frac{e^{x(n+1)}\left[(n+1)(1-e^{x})+e^{x}\right]}{(1-e^{x})^2} = \frac{e^{x(n+1)}\left[n-ne^{x}+1-e^{x}+e^{x}\right]}{(1-e^{x})^2} =$$

$$= \frac{e^{x(n+1)}\left[n-ne^{x}+1\right]}{(1-e^{x})^2} = \frac{e^{x(n+1)}\left[n+1-ne^{x}\right]}{(1-e^{x})^2}$$

Per cui

$$g_n'(x) > 0 \iff n+1-ne^{x} > 0 \iff n+1 > ne^{x} \iff$$

$$\iff e^{x} < \frac{n+1}{n} \iff x < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

e siccome $x \in (-\infty,0) \Rightarrow x < 0 < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Dunque $g_n'(x)$ è sempre $>0 \Rightarrow$ il sup si ha in $x=0$

Dunque

$$\sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{e^{(n+1)x}}{1-e^{x}} \right| = \sup_{x\in(-\infty,0)} \frac{e^{(n+1)x}}{1-e^{x}} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

In conclusione, non c'è convergenza uniforme in $(-\infty,0)$.
Se invece consideriamo l'intervallo $(-\infty,\tau)$ con $\tau<0$ si ha

$$\sup_{x\in(-\infty,\tau)} \left| \frac{e^{x(n+1)}}{1-e^{x}} \right| = \sup_{x\in(-\infty,\tau)} \frac{e^{x(n+1)}}{1-e^{x}} = \frac{e^{\tau(n+1)}}{1-e^{\tau}}$$

Passando al limite si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\tau(n+1)}}{1-e^{\tau}} = \frac{0}{1-e^{\tau}} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\tau(n+1)}}{1-e^{\tau}} = \frac{0}{1-e^{\tau}} = 0$$

Dunque vi è convergenza uniforme in $(-\infty, \tau)$, cioè

$$S_n \xrightarrow{U} f \quad \text{in } (-\infty, \tau)$$

$\boxtimes$

Es 2

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} \qquad \text{con } p \in \mathbb{R}$$

Verificare che:

a) la serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se $p>0$

b) converge uniformemente se $p > \frac{1}{2}$

Sol

Sia $x \neq 0$ (dato che per $x=0$ si ha convergenza $\forall p$).

Per cui si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{p+1}x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x\, n^{p+1}} =$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} < +\infty \iff p+1>1 \iff p>0$$

Vediamo ora la convergenza uniforme:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$$

Si ha che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{n^p(1+nx^2)} \right| \leq \frac{1}{n^p} \cdot \sup \left| \frac{x}{1+nx^2} \right|$$

Poniamo $g(x) \overset{def}{=} \dfrac{x}{1+nx^2}$

Si ha

$$g'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} > 0 \iff 1-nx^2>0$$

$$\iff 1 > nx^2$$

$$\iff x^2 < \frac{1}{n}$$

$$\iff -\frac{1}{\sqrt{n}} < x < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Il sup è raggiunto in $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

si ha dunque:

$$\frac{1}{n^p} \cdot \sup\left|\frac{x}{1+nx^2}\right| = \frac{1}{n^p} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^p}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Per cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}} < +\infty \iff p+\frac{1}{2} > 1$$

$$\iff p > \frac{1}{2}$$

Per cui vi è convergenza uniforme se $p > 1/2$

$\blacksquare$

Esercitazione 9

martedì 28 dicembre 2021 17:31

Es 1

Ultimo esercizio dell'esercitazione precedente

Es 2

Verificare che

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Converge uniformemente in $[0,1]$ ma non totalmente

Sol

La serie è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k}$$

Si ha che

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$$

Quindi non c'è convergenza totale.

- Studiamo ora la convergenza puntuale:

Notiamo che siamo in presenza di una serie a segni alterni, vediamo perciò se è possibile applicare il criterio di Leibniz

Cioè: Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ una serie a segni alterni, se

$$\left.\begin{cases} \cdot\ a_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \\ \cdot\ a_n \text{ è definitivamente decrescente} \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{la serie converge}$$

Inoltre $|S - \underbrace{S_k}_{=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k+1}\cdot a_n}| < a_{k+1}$

Fissiamo dunque $x \in [0,1]$, si ha:

- $\dfrac{x^k}{k} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$

- $\dfrac{x^k}{k}$ è decrescente

Dunque la serie converge.

Studiamo ora la convergenza uniforme:

Sia dunque $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k}$ la funzione somma

Per il criterio di Leibniz si ha:

Per il criterio di Leibniz si ha:

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \right| < \frac{x^{k+1}}{k+1} < \frac{1}{k+1} \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - S_n \right| < \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

Dunque c'è convergenza uniforme e si ha che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \xrightarrow{\;u\;} f \qquad \text{in } [0,1]$$

■

Es 3

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^2 e^{-nt}$$

a) Dimostrare che converge uniformemente in $[0,+\infty)$ con somma $\dfrac{t^2}{1-e^{-t}}$

b) Posto $g_n(x) \overset{def}{=} \int_0^x t^2 e^{-(n+1)t}\, dt$, dimostrare che $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$

c) Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$

SOL

a): Sia $f_n(x) = t^2 e^{-nt}$, facendo il limite per $n \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} t^2 e^{-nt} = 0$$

Dunque: $\sup_{x\in I} |f_n(t) - f| = \sup_{x\in I} |t^2 e^{-nt} - 0| = \sup_{x\in I} |t^2 e^{-nt}| =$

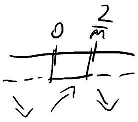
$$= \sup_{x\in I} t^2 e^{-nt}$$

Calcoliamo $f_n'(t)$:

$$f_n'(t) = 2t\cdot e^{-nt} + t^2 e^{-nt}\cdot(-n) = 2t e^{-nt} - t^2 n\cdot e^{-nt} =$$
$$= t e^{-nt}(2-nt)$$

Imponiamo $f_n'(t)=0$ e troviamo t:

$$te^{-nt}(2-nt)=0 \quad \begin{cases} \to t=0 \\ \to t=\frac{2}{n}\end{cases} \implies \text{Si ha } f_n'(t)>0 \text{ se } 0<t<\frac{2}{n} \implies$$



Il sup si ha quando $t=\frac{2}{n}$, perciò:

$$\sup_{t\in I} t^2e^{-nt} = \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot e^{-n\cdot\frac{2}{n}} = \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot e^{-2} = \frac{4}{n^2e^2}$$

e si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2e^2} < +\infty$$

Dunque c'è convergenza totale $\implies$ convergenza uniforme

Resta da calcolare la somma:

Fissiamo $t\in[0,+\infty)$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^2e^{-nt} = t^2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = t^2 \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^t}\right)^n = t^2\cdot \lim_{K\to+\infty}\sum_{n=1}^{K}\left(\frac{1}{e^t}\right)^n = t^2\cdot \lim_{K\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{e^t}\right)^{K+1}}{1-e^t} =$$
$$= t^2\cdot\frac{1-0}{1-\frac{1}{e^t}} = t^2\cdot\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{t^2}{1-e^{-t}}$$

b) Si ha:

$$\left|\int_0^x t^2\cdot e^{-(n+1)t}dt\right| = |g_n(x)| < \int_0^{+\infty} \underbrace{t^2}_{f(t)}\underbrace{e^{-(n+1)t}}_{g'(t)}dt \overset{\text{INTEGRIAMO PER PARTI}}{=} f(t)g(t) - \int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt$$
$$= t^2\cdot\left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} 2t\left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)dt =$$
$$= 0 + \int_0^{+\infty} 2t\cdot\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\,dt = \frac{2}{n+1}\int_0^{+\infty}\underbrace{t}_{f(t)}\cdot\underbrace{e^{-(n+1)t}}_{g'(t)}\,dt =$$
$$= \frac{2}{n+1}\left(f(t)g(t) - \int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{n+1}\left(f(t)\,g(t) - \int_0 f'(t)\,g(t)\,dt \right) =$$

$$= \frac{2}{n+1}\left(t\cdot\left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\,dt \right) =$$

$$= \frac{2}{n+1}\left(0 + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\,dt \right) = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{(n+1)^2}\left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = -\frac{2}{(n+1)^2}\left(\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}$$

$$= -\frac{2}{(n+1)^2}\left(0 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{(n+1)^3}$$

$\Rightarrow |g_n(x)|$ converge totalmente $\Rightarrow$ converge uniformemente in $[0, +\infty)$

c) Si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t(1-e^{-t})} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1-e^{-t}}\cdot e^{-t} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{t^2}{1-e^{-t}} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\cdot e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t}\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$$

Esercitazione 10

mercoledì 29 dicembre 2021 16:52

Es 1

* Ultimo esercizio dell'esercitazione precedente *

Es 2

Determinare l'intervallo di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$

SOL

Per il criterio della radice si ha:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow r = 2$

Converge in $(-2, 2)$

Controlliamo agli estremi:

- Se $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$

- Se $x = -2 \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{n+1} \longrightarrow$ Converge

. Se $x=-2 \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{n+1} \longrightarrow$ Converge

In conclusione:

- La serie converge puntualmente in $[-2, 2)$
- La serie converge totalmente in ogni $[a, b] \subseteq (-2, 2)$
- La serie converge uniformemente in $[-2, b] \subset (-2, 2)$

Es 1

Determinare l'intervallo di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lg(n)}{n \cdot 2^n} \cdot x^n$$

Sol

Per il criterio del rapporto si ha:
$$\frac{lg(n+1)}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{lg(n)} = \frac{lg(n+1)}{lg(n)} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{2}$$

Per cui si ha
$$r = 2$$

Quindi la serie converge in $(-2, 2)$.
Vediamo come si comporta la serie in $x=2$ e $x=-2$:

- Se $x=2$ si ha:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lg(n)}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lg(n)}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$
Dunque in $x=2$ la serie diverge

- Se $x=-2$ si ha:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lg(n)}{n \cdot 2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{lg(n)}{n}$$
Notiamo che converge per il criterio di Leibniz, infatti:
1) $\lim_{n \to +\infty} g(n) = 0$ $\quad$ [Poniamo $g(x) = \frac{lg(n)}{n}$]
2) $g'(n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n - lg(n)}{n^2} = \frac{1 - lg(n)}{n^2} \geq 0$ se $1 \geq lg(n) \Rightarrow n \leq e$
Si ha decrescenza se $n > e$ (e noi stiamo facendo tendere n all'infinito, dunque ci sta bene).

In conclusione:
- La serie converge puntualmente in $[-2, 2)$
- La serie converge totalmente in ogni $[a, b] \subseteq [-2, 2)$
- La serie converge uniformemente in ogni $[-2, b] \subset [-2, 2)$

$\blacksquare$

Es 2

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$$

SOL

- Se $|x|<1$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$$

Dunque la serie converge assolutamente in $(-1,1) \Rightarrow$ converge puntualmente in $(-1,1)$

- Se $x=1$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$$

- Se $x=-1$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n!} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} < +\infty$$

- Se $|x|>1$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n!} \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x|^n}{n}\right)^n = +\infty$$

In conclusione:

- La serie converge puntualmente in $[-1,1]$
- La serie converge totalmente in ogni $[a,b] \subseteq (-1,1)$
- La serie converge uniformemente in ogni $[-1,b] \subseteq [-1,1]$

Esercitazione 12

sabato 1 gennaio 2022 16:31

Es 1

Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n + n^2}$$

SOL

Per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n+1}+(n+1)^2} \cdot 3^n + n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+n^2}{3^{n+1}+(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Per cui si ha $r = 3$

L'intervallo di convergenza è dato da:

$$|x-1|<3$$

Cioè

$$-3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2<x<4$$

Dunque l'intervallo è $(-2, 4)$.

Vediamo cosa accade agli estremi di tale intervallo:

- Se $x=-2$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{3^n+n^2} \quad \text{non converge}$$

- Se $x=4$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{3^n+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{n^2}{3^n}} \quad \text{non converge}$$

In conclusione:

- La serie converge totalmente in ogni $[a,b] \subset (-2,4)$

Es 2

Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

e scrivere la funzione somma

SOL

Applichiamo il criterio del rapporto, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Dunque $r=1 \Rightarrow$ L'intervallo di convergenza è $(-1, 1)$.

Vediamo cosa accade agli estremi dell'intervallo:

- Se $x=-1$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot (-1)^n \quad \text{non converge}$$

- Se $x=1$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n \quad \text{non converge}$$

In conclusione:

- La serie converge totalmente in ogni $[a,b] \subset (-1,1)$

Ora dobbiamo calcolare la somma. Si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x \cdot (n \cdot x^{n-1}) = x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(x^n) =$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\lim_{K \to +\infty} \sum_{n=0}^{K} x^n\right) = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\lim_{K\to+\infty} \frac{1-x^{K+1}}{1-x}\right) \overset{x \in (-1,1)}{=}$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \cdot \left(\frac{-(-1)}{(1-x)^2}\right) = x \cdot \frac{1}{(1-x^2)} = \frac{x}{1-x^2}$$

Es 3

Scrivere la formula di Taylor di ordine 3 e punto iniziale $x_0 = 0$ per la funzione

$$f(x) = \lg(1+x)$$

Calcolare tale formula in $x = \frac{1}{2}$ per provare che $\lg\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{5}{12}$ con errore $|E| < \frac{1}{2^6}$

Sol

Si ha che:

$$f^{(0)}(x_0) = \lg(1+x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{1+x_0} \cdot x = x$$

$$f''(x_0) = \frac{-1}{(1+x_0)^2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot x^2 = -\frac{1}{2}x^2$$

$$f'''(x_0) = \frac{2(1+x_0)\cdot 1}{(1+x_0)^4} \cdot \frac{1}{3!} \cdot x^3 = \frac{2}{3!} \cdot x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

$$f^{(IV)}(x_0) = \frac{2\cdot(1+x_0)^4 - 4(1+x_0)^3[2\cdot(1+x_0)]}{(1+x_0)^8} \cdot \frac{1}{4!} \cdot x^4 = \frac{2-8}{4!} \cdot x^4 = -\frac{6}{4!}x^4$$

[Dato che $f(x) = \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{K}(x_0)}{K!} \cdot (x-x_0)^K + R_n$ dobbiamo calcolare $f^{(n+1)}(x_0)$ perché $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$ con $\xi \in (x_0, x)$]

Per cui

dove $n=3$ nel nostro caso

$$f(x) = \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{K}(x_0)}{K!} \cdot (x-x_0)^K = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + R_n(x) =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \underbrace{- \frac{6}{24} \cdot x^4 \cdot \frac{1}{(1+\xi)^4}} \quad (\text{con } \xi \in (0,x))$$

Dato che noi ci dovevamo fermare al terzo ordine, questo pezzo qui rappresenta il nostro errore.

terzo ordine, questo pezzo qui rappresenta il nostro errore.

Dunque

abbiamo sostituito $\frac{1}{2}$ alla formula di sopra

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)=\lg\left(\frac{3}{2}\right)\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{5}{12}$$

Calcoliamo ora l'errore:

L'errore è:

≤ 1, dunque possiamo maggiorare con:

$$|E|=\left|-\frac{6}{24}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^4}\cdot x^4\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\right|=\frac{1}{4}\cdot\boxed{\frac{1}{(1+\xi)^4}}\cdot\frac{1}{2^4}\leq\frac{1}{2^6}$$

$\blacksquare$

Es 4

Scrivere la serie di MacLaurin di $f(x)=\frac{1}{4+x^4}$, specificare il raggio di convergenza. Calcolare la serie delle derivate e dire a quale funzione converge.

SOL

Si ha che $f(x)=\frac{1}{4+x^4}$

Cerchiamo di ricondurci alla forma di una serie geometrica:

$$f(x)=\frac{1}{4+x^4}=\frac{1}{4\left(1+\frac{x^4}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^4}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x^4}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x^4}{4}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{4}$$

Dobbiamo ora calcolare il raggio di convergenza:

Si ha che

$$\left|\frac{x^4}{4}\right|<1\Rightarrow x^4<4\Rightarrow x^4-4<0$$

Passiamo all'equazione omogenea associata:

$$x^4-4=0\Rightarrow(x^2-2)(x^2+2)=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Dunque si ha:

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ l'intervallo è $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\Rightarrow$ il raggio di convergenza è $r = \sqrt{2}$

- Calcoliamo ora la serie delle derivate:

Si ha:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n}}{4^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot 4n \cdot x^{4n-1}$$

[ATT: nella seconda serie è $n=1$ e non $n=0$; questo perchè lo dice la formula]

e da $f(x) = \frac{1}{4+x^4}$ si ricava $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-4x^3}{(4+x^4)^2} = -\frac{4x^3}{(4+x^4)^2}$$

Es 1

Ultimo esercizio dell'esercitazione precedente

$\blacksquare$

Es 2

Calcolare (per serie) $\int_0^1 e^{x^2}dx$

Sol

Sappiamo che lo sviluppo in serie di Taylor di e^x è: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

Dunque

$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ che converge uniformemente in tutto R, dato che $\rho=+\infty$ per il criterio del rapporto, in particolare converge uniformemente

Per cui

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2n+1}\right]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(2n+1)}$$

$\blacksquare$

Es 3

Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2}{x^4}$

Sol

Sviluppiamo in serie di Taylor e^{x^2} e $\cos x$ fino ad un certo grado a piacere:

- $e^{x^2} = \sum\frac{x^{2n}}{n!} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^5)$
- $\cos(x) = 1+0+\left(-\frac{x^2}{2!}\right)+0+\frac{x^4}{4!}+o(x^5) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$

Per cui

$$e^{x^2}-\cos(x) = \left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right) = x^2+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^4}{4!} = \frac{3}{2}x^2+\frac{12x^4-x^4}{24} = \frac{3}{2}x^2+\frac{11}{24}x^4+o(x^5)$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)-\frac{3}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{24}x^4-\frac{3}{2}x^2+o(x^5)}{x^4} = \frac{11}{24}$$

$\blacksquare$

Es 4

Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\lg(1+x)}{\mathrm{tg}(x)-x}$

Sol

Sviluppiamo in serie di Taylor e^x, $\lg(1+x)$, $\mathrm{tg}(x)$ fino ad un certo grado a piacere:

- $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$
- $\lg(1+x) = 0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$
- $\mathrm{Tg}(x) = 0+x+0+\frac{x^3}{3}+o(x^4) = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$

Per cui si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\lg(1+x)}{\mathrm{tg}(x)-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)+\left(x-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)-1}{x+\frac{x^3}{3}-x+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-1}{\frac{x^3}{3}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+2x+\frac{x^3+2x^3}{6}+o(x^4)\cancel{-1}}{\frac{x^3}{3}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{3x^3}{6}+ \dots}{\frac{x^3}{3}+o(x^4 \dots}$$

$\blacksquare$

te in $[0,1]$ (Gli estremi dell' integrale)

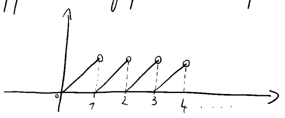
$$\frac{\ldots o(x^4)}{\ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)}{\frac{x^3}{3} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{x^3}{3} + o(x^4)} + \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x^3} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{x^2} + 6 = +\infty$$

Es 1

Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x - [x]$

Sol

Rappresentiamo graficamente la funzione



Ora per poter estendere con continuità agli estremi una funzione f su (a,b), dobbiamo vedere se $\exists\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e t.c. $g|_{(a,b)} \equiv f$

Consideriamo $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T=1$.

Sia $h : [-\pi, \pi] \longrightarrow [0,1]$ definita da:

$$h(t) = \frac{t+\pi}{2\pi}$$

Sia $g = f \circ h$, per cui si ha:

Dato che f è di periodo $T=1$

$$g(t+2\pi) = f(h(t+2\pi)) = f\left(\frac{t+2\pi+\pi}{2\pi}\right) = f\left(\frac{t+\pi}{2\pi}+1\right) \overset{\downarrow}{=} f\left(\frac{t+\pi}{2\pi}\right) = f(h(t)) = g(t)$$

$\Rightarrow$ abbiamo trovato g di periodo 2π.

Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier:

PROCEDIAMO PER SOSTITUZIONE

- $$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{t+\pi}{2\pi}\right)dt \overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} y = \frac{t+\pi}{2\pi} \\ dy = \frac{1}{2\pi}\,dt \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 f(y)\, 2\pi\, dy = 2\int_0^1 f(y)\,dy = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{2}\right] = 1$$

- $$a_k = 2\int_0^1 x \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot x)\,dx = 2\left[\left[x \cdot \frac{\sin(2\pi k x)}{2\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi k x)}{2\pi k}\right] = 2\left[0 - \frac{1}{2\pi k}\int_0^1 \sin(2\pi k x)\,dx\right] = 2\left[-\frac{1}{2\pi k}\left[-\frac{\cos(2\pi k x)}{2\pi k}\right]_0^1\right] = 2\left[+\frac{1}{2\pi k}\left[\frac{\cos(2\pi k)}{2\pi k} - \right.\right.$$

- $$b_k = 2\int_0^1 x \cdot \sin(2\pi k x)\,dx = 2\left[\left[x \cdot \frac{-\cos(2\pi k x)}{2\pi k}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi k x)}{2\pi k}\,dx\right] = 2\left(\frac{-1}{2\pi k} + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi k x)}{2\pi k}\right) = -\frac{1}{\pi k} + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \cos(2\pi k x)\,dx = -\frac{1}{k\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{k\pi} \cdot \sin(2\pi k x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \sin(2k\pi x)$$

$\blacksquare$

$$\frac{\cos(0)}{2\pi K}\Big] = 2\left(\frac{1}{2K\pi}\right)\left(\frac{\cos(2\pi K)}{2\pi K} - \frac{1}{2\pi K}\right) = 2\left(\frac{1}{2K\pi}\right)\overbrace{\left(\frac{\cos(2K\pi)-1}{2K\pi}\right)}^{=0 \text{ Perché } \cos(2K\pi)=1 \text{ sempre}} = 0$$

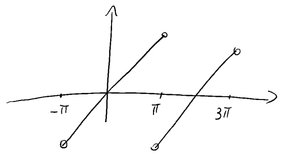
E, 1

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ottenuta prolungando per periodicità la funzione $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier. Usando l'uguaglianza di Bessel dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

SOL

Rappresentiamo graficamente la funzione:



Si ha che, su ogni intervallo del tipo $(-\pi + 2K\pi, \pi + 2K\pi)$, la derivata vale:

$$f'(x) = 1$$

Inoltre f è prolungabile con continuità a $[-\pi + 2K\pi, \pi + 2K\pi]$

$\Rightarrow f$ è regolare a tratti.

Pertanto la serie converge puntualmente alla funzione:

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (-\pi + 2K\pi, \pi + 2K\pi) \\ 0 & \text{se } x = \pi + 2K\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad S(x) = f(x)$

Si ha convergenza uniforme negli intervalli $[a, b] \subseteq (-\pi + 2K\pi, \pi + 2K\pi)$

Calcoliamo ora la serie di Fourier associata ad f:

Osserviamo che f è dispari $\Rightarrow a_K = 0 \quad \forall K$

Calcoliamo i b_K, si ha:

$$b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\tfrac{2\pi}{T}Kx\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(Kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(Kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{x \cdot (-\cos(Kx))}{K}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(Kx)}{K}dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{x \cdot \cos(Kx)}{K}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(Kx)}{K}dx\right] = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x\cos(Kx)}{K}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi K}\int_{-\pi}^{\pi} \cos$$

Dunque la serie di Fourier di f è:

$$\sum_{K=1}^{+\infty} (-1)^K \cdot \left(-\frac{2}{K}\right) \cdot \sin(Kx)$$

- Ora si ha che:

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{K=1}^{n} a_K^2 + b_K^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{K=1}^{n} a_K^2 + b_K^2$$

Nel nostro caso si ha che $a_K = 0 \quad \forall K$, e passando al limite per $n \to +\infty$ si ha:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{K=1}^{+\infty} b_K^2$$

Risulta che:

- $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[2\frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{2}{3}\pi^2$

- $\sum_{K=1}^{+\infty} b_K^2 = \sum_{K=1}^{+\infty}\left((-1)^K \cdot \left(-\frac{2}{K}\right)\right)^2 = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{4}{K^2}$

IL COSENO É UNA FUNZIONE PARI

$$(kx)\,dx = -\frac{1}{k\pi}\Big(\pi\cdot\cos(k\pi) + \underbrace{\pi\cdot\cos(-k\pi)}_{=\,\pi\cdot\cos(k\pi)}\Big) + \frac{1}{\pi k}\cdot\overbrace{\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}^{=\,0} = -\frac{1}{k\pi}\cdot 2\pi\cos(k\pi) = -\frac{2}{k}\cdot\cos(k\pi) = -\frac{2}{k}(-1)^{k}$$

- $\sum_{K=1}^{+\infty} b_K^{\,2} = \sum_{K=1}^{+\infty} \left((-1)^K \cdot \left(-\frac{2}{K}\right)\right)^2 = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{4}{K^2}$

Quindi

Dalla uguaglianza vista sopra

$$\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{4}{K^2} = \frac{2}{3}\pi^2$$

In conclusione

$$\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\cdot\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

Es 1

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ottenuta prolungando per periodicità la funzione $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier.
Dimostrare inoltre che:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

e

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Sol

Osserviamo che $f'(x)$ è continua in ogni intervallo aperto $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ ed è prolungabile per continuità ad ogni intervallo chiuso $[-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$.

$\Rightarrow$ f è regolare a tratti, perciò la sua serie di Fourier converge puntualmente a:

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi) \\ \pi^2 & \text{se } x = \pm\pi+2k\pi \end{cases}$$

Osserviamo che $S(x)$ è continua su $\mathbb{R}$.

Siccome f ed S coincidono dappertutto tranne che nei punti $\pi + k\pi$, la serie di Fourier di f coincide con quella di S.

S continua

$\Rightarrow$ La serie converge totalmente (e quindi uniformemente)

Calcoliamo ora la serie di Fourier associata ad f:

Siccome f è pari $\Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k$

Inoltre

- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3}\pi^3\right) = \frac{2}{3}\pi^2$

- $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\overbrace{\left[\frac{x^2\cdot\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}^{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\,dx\right) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\,dx = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\cdot\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{k\pi}\left(\left[x\cdot\frac{(-\cos(kx))}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right)$

Quindi la serie di Fourier è:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{4}{k^2}\cdot\cos(kx)$$

- Poniamo ora $S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k\cdot\frac{4}{k^2}\cdot\cos(kx)$

Se $x=0$ si ha:

$$\underset{0}{\overset{\parallel}{S(0)}} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{4}{k^2}$$

Perché $S(x)=f(x)=x^2 \Rightarrow f(0)=0=S(0)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{4}{k^2} = -\frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Se $x=\pi$, si ha:

$$\underset{\pi^2}{\overset{\parallel}{S(\pi)}} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{4}{k^2}\,(-1)^k$$

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$) = \frac{2}{K\pi} \cdot \left[\frac{x \cos(Kx)}{K} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{K\pi} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(Kx)}{K} dx}^{=0} = \frac{2}{K^2\pi} \left(\pi \cdot \cos(K\pi) + \pi \cdot \cos(K\pi) \right) = \frac{2}{K^2\pi} \cdot 2\pi \cdot \cos(K\pi) = \frac{4}{K^2} \cdot \cos(K\pi) = (-1)^K \cdot \frac{4}{K^2}$$

Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$.
Il numero reale a si dice valore d'aderenza di $\{a_n\}$ se:
$\forall \varepsilon > 0$ l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ è infinito.

OSS
Se $\{a_n\}$ è una successione che converge ad a, allora a è anche valore d'aderenza di $\{a_n\}$. (Il viceversa non vale in generale)

TEO:
Il valore $a \in \mathbb{R}$ è di aderenza per una successione $\{a_n\} \iff \exists \underbrace{\{a_{n_k}\}}_{\text{successione estratta}} \subset \{a_n\}$ che converge ad a

- Definiamo ora il limite inferiore e il limite superiore di una successione $\{a_n\}$:
- Poniamo $M_k \overset{\text{def}}{=} \inf\{a_n \mid n \geq k\}$ (Osserviamo che $\{M_k\}$ è crescente: Siano k_1, k_2 t.c. $k_1 \leq k_2 \Rightarrow \{a_n \mid n \geq k_2\} \subseteq \{a_n \mid n \geq k_1\} \Rightarrow \inf\{a_n \mid n \geq k_2\} \geq \inf\{a_n \mid n \geq k_1\} \Rightarrow M_{k_2} \geq M_{k_1}$)

  Definiamo:
$$\lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n\} = \sup_k M_k = \sup \inf\{a_n \mid n \geq k\}$$
- Analogamente definiamo:
$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n\} = \inf_k \sup\{a_n \mid n \geq k\}$$

TEO
Una successione $\{a_n\}$ converge ad $a \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\{a_n\} = a = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{a_n\}$

Lemma (Caratterizzazione del lim inf e lim sup):
Sia $\{a_n\}$ una successione limitata.
Si ha:

- $$l' = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n\} \iff \begin{cases} \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < l' + \varepsilon\} \text{ è infinito} \\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n > l' - \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \end{cases}$$
- $$l'' = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n\} \iff \begin{cases} \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > l'' - \varepsilon\} \text{ è infinito} \\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n < l'' + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \end{cases}$$

TEO
Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e sia A l'insieme di tutti i suoi valori di aderenza.
Allora
$$l' = \min A \quad \text{e} \quad l'' = \max A$$

DIM
Sia $a \in A$. Allora $\exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ t.c. $a_{n_k} \to a$
Si ha:
$$\inf\{a_{n_k} \mid k \geq s\} \leq \sup\{a_{n_k} \mid k \geq s\}$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \inf\{a_{n_k}\} \leq \lim_{k\to+\infty} \sup\{a_{n_k}\}$$
Si ha
$$\{a_{n_k} \mid k \geq s\} \subseteq \{a_n \mid n \geq s\} \qquad \text{perché } n_k \geq k \geq s$$
Quindi
$$\inf\{a_{n_k} \mid k \geq s\} \geq \inf\{a_n \mid n \geq s\}$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \inf\{a_{n_k}\} \geq \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n\}$$

Analogamente si avrà che:
$$\lim_{k\to+\infty} \sup\{a_{n_k}\} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n\}$$

Analogamente si avrà che:

$$\lim_{k\to+\infty} \sup\{a_{n_k}\} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n\}$$

Pertanto:

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n\} \leq \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \inf\{a_{n_k}\}}_{=a} \leq \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \sup\{a_{n_k}\}}_{=a} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n\}$$

$\Rightarrow \quad l' \leq a \leq l''$

Inoltre $l', l'' \in A$

Per il lemma precedente.

$\Rightarrow \quad l' = \min A \quad$ e $\quad l'' = \max A$

∎

Esercitazione 18

lunedì 10 gennaio 2022 17:06

Es 1

Calcolare lim inf e lim sup di $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

Sol

Si ha

$$a_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ pari} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si ha che:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to +\infty} e$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to +\infty} e^{-1}$$

Otteniamo quindi due sottosuccessioni:

- $a_{2n} \longrightarrow e$
- $a_{2n+1} \longrightarrow e^{-1}$

Consideriamo ora una estratta a_{n_k} di a_n, si ha:

- $a_{n_k} \subseteq a_{2n}$, allora $a_{n_k} \longrightarrow e$ definitivamente
- $a_{n_k} \subseteq a_{2n+1}$, allora $a_{n_k} \longrightarrow e^{-1}$ definitivamente

Dunque a_{n_k} oscilla tra a_{2n} e a_{2n+1}, pertanto non converge

$\Rightarrow A$ = insieme dei valori d'aderenza $= \{e^{-1}, e\}$

Dunque

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n = e^{-1} \quad , \quad \limsup_{n \to +\infty} a_n = e$$

$\blacksquare$

Es 2

Calcolare lim inf e lim sup di $a_n = \dfrac{3^{(-1)^n} + 5 \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{(-1)^{3n} + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

Sol

Si ha

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3+5}{1+5\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = a_{4k} & \text{se } n \equiv_4 0 \\[2ex] \dfrac{3-5}{1+5\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = a_{4k+2} & \text{se } n \equiv_4 2 \\[2ex] \dfrac{1/3}{-1+5\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = a_{2k+1} & \text{se } n \equiv_2 1 \end{cases}$$

Si ha che

- $a_{4k} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{4}{3}$

- $a_{4k+2} \xrightarrow{n\to +\infty} -\frac{1}{3}$
- $a_{2k+1} \xrightarrow{n\to +\infty} \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow A = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{4}{3} \right\}$$

Dunque

$$\liminf a_n = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \limsup a_n = \frac{4}{3}$$

$\blacksquare$

Es 3

Calcolare lim inf e lim sup di $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

Sol

Osserviamo che se $x \geq 0$ si ha:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

Quindi si ha che:

$$0 \leq a \leq 1 \qquad \forall a \in A$$

insieme dei valori d'aderenza

compare l'"uguale" quando si fa il passaggio al limite

Perciò

$$0 \leq \liminf a_n \ , \quad \limsup a_n \leq 1$$

Inoltre

$$a_{n^2} = n - [n] = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{n^2} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow 0 \in A \Rightarrow \liminf a_n = 0$$

Consideriamo ora a_{n^2+2n}, si ha:

$$a_{n^2+2n} = \sqrt{n^2+2n} - \left[\sqrt{n^2+2n}\right]$$

Si ha:

$$n \leq \sqrt{n^2+2n} < \sqrt{(n+1)^2} = n+1$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n$$

Allora

$$a_{n^2+2n} = \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}+n} = \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n} = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \Rightarrow \limsup a_n = 1$$

$\blacksquare$

Es 1

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx + q$

Verificare che:

(a) $f(x)$ è una contrazione su $\mathbb{R} \iff |m| < 1$

(b) Se $m = 1$, $f(x)$ non ha punti fissi oppure se esiste un punto fisso su $\mathbb{R}$ esso non è unico.

SOL

Ricordiamo che una funzione $f: X \to X$ con X spazio metrico è detta contrazione se:

$$d(f(x), f(y)) \le L \cdot f(x,y) \qquad \forall x,y \in X \quad \text{con} \quad 0 < L < 1$$

Dunque:

a): si ha che

$$|f(x) - f(y)| = |mx + q - my - q| = |mx - my| = |m(x-y)| = |m|\,|x-y|$$

$\Rightarrow$ devono essere $|m| < 1$ affinché f sia una contrazione.

b): Sia x_0 punto fisso per f, cioè $f(x_0) = x_0$ (con $m = 1$ per ipotesi)

Allora $f(x_0) \overset{\text{Per come è definita } f}{=} \underset{= 1}{m} x_0 + q$

- Se fosse $q \neq 0$ si avrebbe $\overset{= 1}{m} x_0 + q = x_0 \Rightarrow$ impossibile $\Rightarrow$ Se $q \neq 0$ allora f non ha punti fissi
- Se invece $q = 0$ si ha che $f(x_0) = mx_0$ e $f(x_0) = x_0$, dato che $m = 1$ si ha $\Rightarrow \underbrace{f(x_0) = x_0}_{\text{Sempre vera}} \Rightarrow$ tutti i punti sono punti fissi.

∎

Es 2

Sia $f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$.

Verificare che f ha uno e un solo punto fisso $\iff m \neq 1$.

Stabilire se ciò è in contrasto con l'enunciato del teorema delle contrazioni.

SOL

I punti fissi di f sono dati dall'equazione:

$$mx_0 + q = f(x_0) = x_0$$

$$\Rightarrow mx_0 + q = x_0 \Rightarrow mx_0 + q - x_0 = 0 \Rightarrow mx_0 - x_0 = -q \Rightarrow x_0(m-1) = -q \Rightarrow x_0 = -\frac{q}{m-1} \Rightarrow m \neq 1$$

e $m = 1$ il punto fisso non esiste o non è unico. (Per l'esercizio 1)

Ovviamente ciò non è in contrasto con il teorema delle contrazioni.

Infatti se $|m| > 1$ f non è una contrazione e il teorema non ci dice nulla.

In altre parole, "essere una contrazione" è una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di un unico punto fisso

∎

Es 3

Verificare che $\mathbb{Q}$, munito della metrica euclidea, non è completo.

Sol

Consideriamo $a_n \overset{def}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$

Essa è una successione in $\mathbb{Q}$.

ogni successione convergente è di Cauchy

Essa è anche una successione di Cauchy perchè è convergente in $\mathbb{R}$ $\left(a_n \xrightarrow{n \to +\infty} e\right)$

Però il limite di a_n non appartiene a $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ perciò $\mathbb{Q}$ non è completo

$\blacksquare$

Es 1

Sia X un insieme e d la metrica discreta.
Verificare che:

(a) $\{x_n\} \subset X$ converge ad $x \in X \iff \exists\, \nu \in N$ t.c. $x_n = x \quad \forall n > \nu$

(b) (X, d) è uno spazio metrico completo

SOL

a): Si ha
$$x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0$$

cioè:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \nu \in N$ t.c. $d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Sia $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Allora

$\exists\, \nu \in N$ t.c. $\forall n > \nu \ \ d(x_n, x) < \frac{1}{2} \iff d(x_n, x) = 0 \iff x_n = x$

b): Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di Cauchy in X.

Allora

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \nu \in N$ t.c. $d(x_k, x_h) < \varepsilon \quad \forall k, h > \nu$

Sia $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Allora

Poichè la metrica discreta assume solo due valori: 1 e 0, siccome $1 > \frac{1}{2}$ resta come unica opzione 0

$\exists\, \nu \in N$ t.c. $\forall k, h > \nu \ \ d(x_k, x_h) < \frac{1}{2} \Rightarrow d(x_k, x_h) = 0 \Rightarrow x_k = x_h$

Perciò $\{x_n\}$ è definitivamente costante e quindi converge in X

Es 2

Considerata la successione $u_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n} \quad x \in [-1, 1]$

Verificare che $u_n(x) \xrightarrow{U} |x|$

Consideriamo lo spazio $C^1([-1,1])$ delle funzioni continue in $[-1,1]$ con derivata prima continua in $[-1,1]$, munito della metrica d:

ossia, consideriamo $(C^1([-1,1]), d)$ dove $d(u, v) = \sup\{|u(x) - v(x)| \mid x \in [-1,1]\}$

Tale spazio è completo?

SOL

Si ha:

$$\left|\frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n} - |x|\right| = \left|\frac{\sqrt{1+n^2x^2} - n|x|}{n}\right| = \left|\frac{\sqrt{1+n^2x^2} - n|x|}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+n^2x^2} + n|x|}{\sqrt{1+n^2x^2} + n|x|}\right| = \left|\frac{1+n^2x^2 - n^2x^2}{n\left(\sqrt{1+n^2x^2} + n|x|\right)}\right| = \left|\frac{1}{n\left(\sqrt{1+n^2x^2} + n|x|\right)}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Quindi $u_n(x) \xrightarrow{U} |x|$

Siccome la convergenza indotta da d è proprio quella uniforme, la successione $\{u_n\}$ ci dà una successione di Cauchy in $C^1([-1,1])$ che non converge in $C^1([-1,1])$

$\Rightarrow C^1([-1,1])$ non è completo

Es 3

Sia (X, d) spazio metrico completo e sia $Y \subseteq X$.

Mostrare che (Y, d) è completo $\iff Y$ è chiuso in X.

SOL

$\Rightarrow$): Sia (Y, d) completo.

Consideriamo una successione $\{y_n\} \subseteq Y$ convergente ad un certo $x \in X$.

Poichè converge, essa è di Cauchy

Poichè Y è completo $\Rightarrow x \in Y$

Poichè converge, essa è di Cauchy
Poichè Y è completo $\Rightarrow x \in Y$
$\Rightarrow Y$ è chiuso

($\Leftarrow$): Sia Y chiuso in X e sia $\{y_n\} \subseteq Y$ una successione di Cauchy.
Allora posso vedere $\{y_n\}$ a coefficienti in X.
Siccome X è completo $\Rightarrow y_n \longrightarrow x \in X$
Dato che $Y = \overline{Y} \Rightarrow Y$ contiene i suoi punti di accumulazione $\Rightarrow x \in Y$
$\Rightarrow Y$ è completo

$\blacksquare$

Esercitazione 21

venerdì 14 gennaio 2022 15:34

Es 1

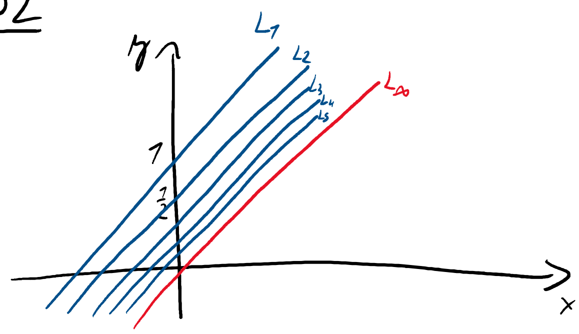
Dato $n \in \mathbb{N}$, si consideri il sottospazio $L_n \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + \frac{1}{n}\}$ di $\mathbb{R}^2$.
Sia $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} L_n$

a) Stabilire se X è connesso e determinare $\overline{X}$

b) dire se $X \cap S^1$ è compatto

c) Dato $B: x^2 + (y^2-1)^2 = \frac{1}{100}$, dire se $X \cap B$ è compatto.

Sol



Sia $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2x + \frac{3}{4}\}$, che è aperto di $\mathbb{R}^2$.

Si ha che:
$$X \cap U = L_1$$

$\Rightarrow L_1$ è aperto

Consideriamo ora $V = \mathbb{R}^2 - \overline{U}$, anche V è aperto di $\mathbb{R}^2$

Si ha che:
$$X \cap V = \bigcup_{n=2}^{+\infty} L_n$$

$\Rightarrow \bigcup_{n=2}^{+\infty} L_n$ è aperto

Ma allora:
$$X = L_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} L_n\right)$$

Cioè X si può scrivere come unione di due aperti con intersezione nulla

$\Rightarrow X$ è sconnesso.

Sia $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$.

Fissiamo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in L$ e sia $T: y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\tilde{x} + \tilde{y}\right)$

Poniamo $a_n = T \cap L$

$\Rightarrow \{a_n\} \subseteq X$ e $a_n \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{X}$

Si ha che:

$X \cup L$ è il più piccolo chiuso che contiene X, allora $\overline{X} = X \cup L$

b): Sia $b_n \stackrel{def}{=} S^1 \cap L_n \cap \{y > 0\} \in X \cap S^1$

$b_n \longrightarrow b \stackrel{def}{=} S^1 \cap L \cap \{y > 0\}$

Ma $b \notin X \cap S^1 \Rightarrow X \cap S^1$ non è chiuso $\Rightarrow X \cap S^1$ non è compatto.

c): $X \cap B$ è compatto perchè è un insieme finito.

$\blacksquare$

Es 1

Sia $C_n \overset{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$.

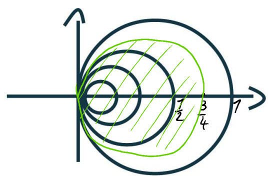
Sia $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$

a) Dire se X è compatto e connesso

b) Dire se $Y \overset{def}{=} X \setminus (0,0)$ è connesso per archi

c) Dato $R \overset{def}{=} \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, dire se $X \cap R$ è compatto

Sol



$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\frac{1}{n})^2 + y^2 \leq \frac{9}{16}\} \setminus \{0,0\}$

$\Rightarrow U = X \setminus C_1 \Rightarrow U$ è aperto

$\Rightarrow Y = U \cup C_1 \Rightarrow$ sconnesso

X è limitato poiché $X \subseteq C_1 = B((1,0),1)$, X è anche chiuso dato che contiene i suoi punti di accumulazione $\Rightarrow X$ è compatto.

X è connesso per archi $\Rightarrow X$ è connesso

b): Consideriamo $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\frac{1}{n})^2 + y^2 \leq \frac{9}{16}\}$

Risulta che

$$Y \cap U = \bigcup_{n=2}^{+\infty} C_n \setminus (0,0)$$

Poniamo $A \overset{def}{=} Y \cap U$

$\Rightarrow A$ è un sottoinsieme di Y che è sia aperto che chiuso

$\Rightarrow Y$ non è connesso $\Rightarrow Y$ non è connesso per archi

c): Si ha che:

$X \cap R = \{(\frac{2}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$

$\Rightarrow X \cap R$ è chiuso e limitato $\Rightarrow X \cap R$ è compatto.

Es 2

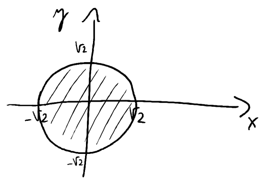
Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni, rappresentarle graficamente e dire se è connesso, convesso e compatto.

a) $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$

b) $f(x,y) = \frac{e^{\sqrt{x^2-y^2}}}{x-y}$

Sol

a) Dominio: $2-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 2$

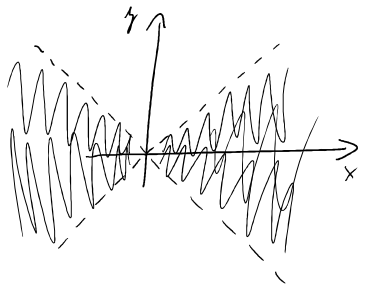


É convesso $\Rightarrow$ É connesso

É convesso $\Rightarrow$ É connesso

É chiuso e limitato $\Rightarrow$ É compatto.

b): Dominio: $\begin{cases} x^2 - y^2 \geq 0 \\ y \neq \pm x \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) > 0$



Non è connesso $\Rightarrow$ non è convesso

Non è limitato $\Rightarrow$ non è compatto ▨

Es 1

Studiare l'insieme di definizione di:

a) $f(x,y) = \log\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)$

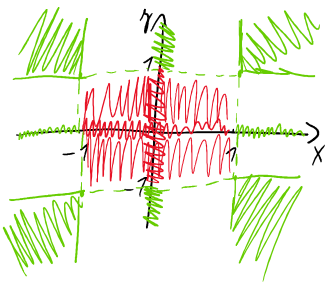
b) $f(x,y) = \sqrt{x \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

Sol

a): Poniamo $\frac{1-x^2}{1-y^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-y^2>0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 1-x^2<0 \\ 1-y^2<0 \end{cases}$

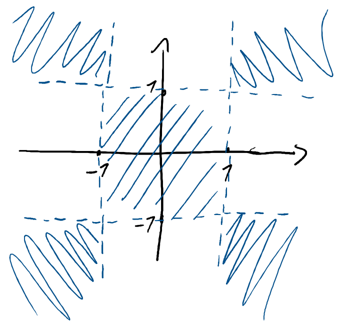
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\begin{cases} -1<x<1 \\ -1<y<1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x<-1 \cup x>1 \\ y<-1 \cup y>1 \end{cases}$



In conclusione $\xrightarrow{\text{R+V=B}}$

R + V = B
ROSSO VERDE BLU



Non è connesso

Non è convesso

Non è compatto

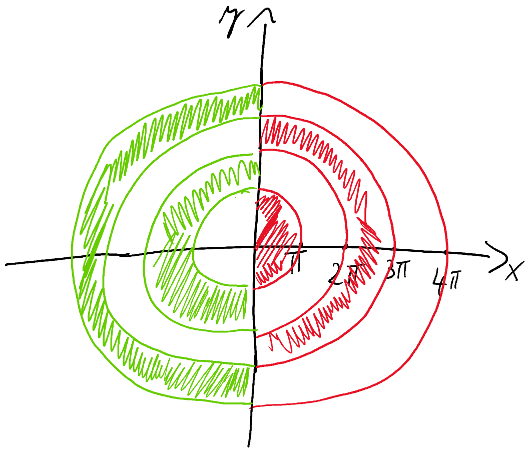
b): Poniamo: $x \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \geq 0$

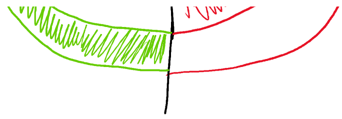
Si ha:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \geq 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x \leq 0 \\ \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \leq 0 \end{cases}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2k\pi \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \pi + 2k\pi \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ \pi + 2k\pi \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\pi + 2k\pi \end{cases}$





É connesso per archi $\Rightarrow$ É connesso

Non è convesso

Non è compatto

$\blacksquare$

Es 2

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=0$$

Sol

Osserviamo che
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\to \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$

Ora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|(x,y)-(0,0)\|_2<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

Ovvero $(x,y)\in B((0,0),\delta)$

Fissiamo $\varepsilon>0$, allora

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Basta prendere $\delta=\sqrt{\varepsilon}$

Allora

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

$\blacksquare$

Es 3

Verificare che $\lim_{(x,y)\to(4,-1)} \frac{xy+y^2+x+y}{y+1} = 3$

Sol

Osserviamo che Dominio $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -1\}$

Si ha:

$$\left| \frac{\overset{x(y+1)+y(y+1)}{\overbrace{xy+y^2+x+y}}}{y+1} - 3 \right| = \left| \frac{(y+1)(x+y)}{y+1} - 3 \right| = |x+y-3| = |x-4+y+1| \leq |x-4| + |y+1| \leq 2\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$\blacksquare$

TEO (Condizione necessaria per l'esistenza del limite):

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, allora per ogni curva regolare $(x(t), y(t))$ contenuta in Dom(f) t.c. $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ si ha:

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)) = l$$

OSS

Ciò significa che il valore del limite se esiste è indipendente dalla curva scelta. In particolare possiamo scegliere le rette:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + lt \\ y(t) = y_0 + mt \end{cases} \quad \cup \quad y = m(x - x_0) + y_0$$

Es 1

Verificare che $f(x,y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$ non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$

SOL

- Lungo l'asse x si ha:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

- Lungo l'asse y si ha:

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\Longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Es 2

Studiare il limite nell'origine di $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{x}{y}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$

SOL

Dobbiamo studiare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

- Valutiamo lungo le rette:

1) Poniamo $y = mx$ con $m \neq 0$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{x}{mx}} = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{1}{m}} = 0$$

2) Sulla retta $y=0$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

3) Sulla retta $x=0$, si ha:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

- Consideriamo la parabola $y=x^2$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} x \cdot e^{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$\blacksquare$

<u>TEO (Condizione sufficiente per l'esistenza del limite)</u>:

Supponiamo che $\exists\, l \in \mathbb{R}$ e $g = g(r)$ t.c. in un intorno di (x_0, y_0) si abbia:

$$|f(x_0 + r\cdot\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta)) - l| \leq g(r)$$

Con $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$

Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$$

$\blacksquare$

Es 3

Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

SOL

Siano $x = r\cdot\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta) \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

Allora si ha:

$$\left|\frac{r^2\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)}{r}\right| = |r\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)| \leq r \xrightarrow{r\to 0^+} 0$$

Dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$\blacksquare$

Es 4

Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot\log(y)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$$

SOL

Poniamo $x = r\cdot\cos(\theta)$, $y = 1 + r\sin(\theta)$

Si ha

$$\left|\frac{r\cdot\cos(\theta)\cdot\log(1+r\sin(\theta))}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta) + (1+r\sin(\theta)-1)^2}}\right| = \left|\frac{r\cdot\cos(\theta)\cdot\log(1+r\sin(\theta))}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}}\right| = \left|\frac{r\cdot\cos(\theta)\cdot\log(1+r\sin(\theta))}{r}\right| = |\cos(\theta)\cdot\log(1+r\sin(\theta))| \leq \log(1+r) \xrightarrow{r\to 0^+} 0$$

Dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$\blacksquare$

Es 1

Calcolare le derivate f_x, f_y della seguente funzione nei punti interni al suo dominio:

$$f(x,y) = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2$$

Sol

$$f_x = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)$$

$$f_y = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

■

Es 2

In quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esistono le derivate parziali di:

$$f(x,y) = |xy|$$

Sol

Fissiamo $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha che:

$$f(x,y_0) = |x\, y_0| = |x|\,|y_0|$$

che è derivabile $\forall x \neq 0$.

In particolare:

$$f_x(x,y_0) = \begin{cases} |y_0| & \text{se } x > 0 \\ -|y_0| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se $y_0 = 0$, si ha che:

$$f(x,y_0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$f_x(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = 0$$

$$\quad \lim_{h\to 0} \quad h$$

Pertanto f è derivabile rispetto ad x nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\} \cup \{(0,0)\}$

$\blacksquare$

Es 3

Sia $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) Calcolare $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ $\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

b) Calcolare $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$

c) Commentare i risultati alla luce del teorema di Schwarz

Sol

a):
$$f_x(x,y)=\frac{3yx^2(x^2+y^2)-x^3y(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3yx^4+3x^2y^3-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{con } (x,y)\neq(0,0)$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5+x^3y^2-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{con } (x,y)\neq(0,0)$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{K\to 0}\frac{f(0,0+K)-f(0,0)}{K}=\lim_{K\to 0}\frac{f(0,K)-f(0,0)}{K}=\lim_{K\to 0}\frac{0-0}{K}=0$$

Si ha:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(0,0)=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$$

b):
$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{K\to 0}\frac{f_y(0+K,0)-f_y(0,0)}{K}=\lim_{K\to 0}\frac{f_y(K,0)-f_y(0,0)}{K}=\frac{K-0}{K}=\frac{K}{K}=1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(0+k,0) - f_y(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(k,0) - f_y(0,0)}{k} = \frac{k - 0}{k} = \frac{k}{k} = 1$$

c): Almeno una delle due derivate miste non è continua in $(0,0)$

Es 1

Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Verificare che:

a) f non è continua in $(0,0)$

b) f è derivabile in $(0,0)$

c) f non è differenziabile in $(0,0)$

Sol

a) Sia $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim_{x\to0} \frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2 m}{x^2(m+1)} = \frac{m}{m+1} \neq \lim_{x\to0} f(x,0) = 0$ [Abbiamo trovato dunque due limiti diversi]

$\Rightarrow f(x,y)$ non è continua in $(0,0)$

b): Si ha:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{0-0}{k} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$

c): f non è continua $\Rightarrow f$ non è differenziabile

▨

Es 2

Sia $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$

Mostrare che f è differenziabile in $(0,0)$ ma non è $C^1((0,0))$.

Sol

$f_x(x,y) = 0$ se $y \neq 0$

$f_y(x,y) = 2y \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right) + y^2\left(-\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = 2y\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ se $y \neq 0$

$$f_x(x,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to0} \frac{f(x,0+k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \frac{k^2\cos\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = k\cdot\cos\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k\to0} 0$$

Inoltre si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(0,y) = \lim_{y\to0} 2y\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y \Rightarrow f \notin C^1((0,0))$

Controlliamo ora la differenziabilità in $(0,0)$:

Si ha:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2\cos\left(\frac{1}{k}\right)-0-f_x(0,0)\cdot h - f_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{k^2\cos\left(\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \left(\begin{array}{l}\text{Poniamo:}\\ h = \rho\cdot\cos(\theta) \\ k = \rho\cdot\sin(\theta)\end{array}\right) = \frac{\rho^2\sin^2(\theta)\cdot\cos\left(\frac{1}{\rho\cdot\sin(\theta)}\right)}{\rho} \xrightarrow{\rho\to0} 0$$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in $(0,0)$

▨

Es 3

Determinare il differenziale in un generico (x_0, y_0) della seguente funzione:

$$f(x,y) = e^x \cos(y)$$

SOL

Si ha:

$f_x(x,y) = e^x \cos(y)$

$f_y(x,y) = -e^x \sin(y)$

Il differenziale di f in (x_0,y_0) è il funzionale lineare $df(x_0,y_0) : R^2 \longrightarrow R$

$df(x_0,y_0) : h \longrightarrow \langle \nabla f(x_0,y_0), h \rangle$ dove $\nabla f(x_0,y_0) = \left(e^{x_0} \cdot \cos(y_0), -e^{x_0} \sin(y_0)\right)$

Sia $\{dx, dy\}$ una base di R^2. Si ha:

$dx : R^2 \longrightarrow R$ t.c. $dx(h,k) = h$

$dy : R^2 \longrightarrow R$ t.c. $dy(h,k) = K$

Considerando $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 \binom{0}{1}$ $\Rightarrow$ $dx(e_1) = dx(1,0) = 1$

$dy(e_1) = dy(1,0) = 0$

$dx(e_2) = dx(0,1) = 0$

$dy(e_2) = dy(0,1) = 1$

Quindi

$$df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy$$

$$df_{(x_0,y_0)}(h,k) = f_x(x_0,y_0) \cdot h + f_y(x_0,y_0) K = \langle \nabla f(x_0,y_0), (h,k) \rangle$$

▨

Es 1

Determinare e classificare i punti stazionari di
$$f(x,y) = 2x\, e^{-(x^2+y^2)}$$

Sol

Osserviamo che $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Si ha:

- $f_x(x,y) = 2\, e^{-(x^2+y^2)} + 2x\, e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = 2\, e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2)$
- $f_y(x,y) = 2x\, e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) = -4xy\, e^{-(x^2+y^2)}$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(2\, e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2)\ ,\ -4xy\, e^{-(x^2+y^2)}\right)$$

Imponiamo $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\, e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) = 0 \\ -4xy\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ -4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato due punti:

$P_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Calcoliamo ora le derivate seconde (sia miste che pure):

- $f_{xx}(x,y) = 2\, e^{-(x^2+y^2)}(-2x)(1-2x^2) + 2\, e^{-(x^2+y^2)}(-4x) = -4x\, e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) + (-4x)\cdot 2\, e^{-(x^2+y^2)} = -4x\, e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2+2) = -4x\, e^{-(x^2+y^2)}(3-2x^2)$
- $f_{xy}(x,y) = 2\, e^{-(x^2+y^2)}(-2y)(1-2x^2) = -4y\,(1-2x^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$
- $f_{yy}(x,y) = -4x\, e^{-(x^2+y^2)} + (-4xy)\, e^{-(x^2+y^2)}(-2y) = -4x\, e^{-(x^2+y^2)} + (-4xy)(-2y)\, e^{-(x^2+y^2)} = -4x\, e^{-(x^2+y^2)}(1+(-2y^2)) = -4x\, e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2)$

Costruiamo la matrice Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Vediamo come si comporta la matrice Hessiana nei punti P_1, P_2:

- $D^2 f(P_1) = D^2 f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\left(3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) & 0 \\ 0 & -4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{2}{4}}(3-1) & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{2}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

- $D^2 f(P_2) = D^2 f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\left(3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) & 0 \\ 0 & -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\, e^{-\frac{2}{4}}(3-1) & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}\, e^{-\frac{2}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

Calcoliamo ora il determinante Hessiano delle due matrici:

$H_f(P_1) = H_f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 16\cdot e^{-1} > 0$ e dato che $a_{11} > 0 \Rightarrow P_1$ è punto di minimo

$H_f(P_2) = H_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} -4\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 16\cdot e^{-1} > 0$ e dato che $a_{11} < 0 \Rightarrow P_2$ è punto di massimo

Es 2

Studiare il carattere di:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}}\,dx$

Sol

a): $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^3+\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}}_{<+\infty} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}}_{<+\infty} < +\infty$

b): $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}} = \underbrace{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}}}_{1} + \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}}}_{2} + \underbrace{\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}}}_{3} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}}}_{4}$

Dobbiamo studiare i 4 pezzi:

1: $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}} \sim \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} < +\infty$

2: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}} \sim \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x} \sim \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{3}}} < +\infty$

3: $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}} \sim \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x} \sim \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{3}}} < +\infty$

4: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x(x-1)\sqrt{x+1}} \sim \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x-1} \overset{\text{sostituendo 1 al numeratore}}{\sim} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Dato che l'ultimo pezzo dell'integrale diverge $\Rightarrow$ diverge tutto

Es 3

Studiare la convergenza di $f_n(x) = \dfrac{n\cdot\sin(x^2+1) + n^2 x}{n^2(x^2+1)}$

Sol

Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Per cui

$$f_n \xrightarrow{P} \frac{x}{x^2+1}$$

Vediamo se converge uniformemente, si ha:

$$\left| \frac{n \sin(x^2+1) + n^2 x}{n^2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} \right| = \left| \frac{n \cdot \sin(x^2+1) + n^2 x - n^2 x}{n^2(x^2+1)} \right| = \left| \frac{n \sin(x^2+1)}{n^2(x^2+1)} \right| = \left| \frac{\sin(x^2+1)}{n(x^2+1)} \right|$$

$$\Rightarrow \sup \left| \frac{\sin(x^2+1)}{n(x^2+1)} \right| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} \frac{x}{x^2+1} \quad \text{su tutto } \mathbb{R}$$

∎

Es 1

Determinare il piano tangente al grafico di $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$ nel punto $P_0 = (-1,1)$

Sol

Ricordiamo che l'equazione del piano tangente ad f in P_0 è:

$$H: \ z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Per cui si ha:

- $f(x_0,y_0) = e^{1-1} = e^0 = 1$
- $f_x(x,y) = e^{y^2-x^2} \cdot (-2x) \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = e^{1-1}(2) = 2$
- $f_y(x,y) = e^{y^2-x^2}(2y) \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = e^{1-1}(2) = 2$

Dunque

$$H: \ z = 1 + 2(x-(-1)) + 2(y-1)$$

$$\Rightarrow H: \ z = 1 + 2(x+1) + 2(y-1)$$

$$\Rightarrow z = 1 + 2x + 2 + 2y - 2 \Rightarrow 2x + 2y - z + 1 = 0$$

Es 2

Determinare i punti stazionari di $f(x,y) = y \cdot \log(x+y)$ e specificarne la natura.

Sol

Osserviamo che $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$

Calcoliamo ora le derivate parziali:

- $f_x(x,y) = y \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{y}{x+y}$
- $f_y(x,y) = \log(x+y) + y \cdot \frac{1}{x+y} = \log(x+y) + \frac{y}{x+y}$

$$\Rightarrow Df(x,y) = \left(\frac{y}{y+x}, \log(x+y) + \frac{y}{y+x}\right)$$

Imponiamo $Df(x,y) = (0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} \frac{y}{x+y} = 0 \\ \log(x+y) + \frac{y}{x+y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \log(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto $P_0 = (1,0)$

Calcoliamo ora le derivate seconde miste e le derivate seconde pure che ci serviranno poi per la matrice Hessiana:

- $f_{xx}(x,y) = y \cdot \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right) = -\frac{y}{(x+y)^2}$
- $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{x+y} + y\left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right) = \frac{1}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x+y-y}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2}$
- $f_{yy}(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} + y\left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right) = \frac{2}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{2(x+y)-y}{(x+y)^2} = \frac{2x+2y-y}{(x+y)^2} = \frac{2x+y}{(x+y)^2}$

Costruiamo dunque la matrice Hessiana:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x+y)^2} & \frac{x}{(x+y)^2} \\ \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{2x+y}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^2f(P_0) = D^2f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante Hessiano:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \quad < 0$$

$\Rightarrow$ la matrice è indefinita $\Rightarrow$ P_0 è punto di sella

Es 3

Determinare i punti di max e min relativo di $f(x,y) = (2x-y)\left[3-(2x-y)^2\right]$

SOL

Calcoliamo le derivate parziali:

- $f_x(x,y) = 2\left[3-(2x-y)^2\right] + (2x-y)\left[-2(2x-y)(2)\right] = 6-2(2x-y)^2 + (2x-y)\left[-4(2x-y)\right] = 6-2(2x-y)^2 - 4(2x-y)^2 = 6-6(2x-y)^2$
- $f_y(x,y) = -\left[3-(2x-y)^2\right] + (2x-y)\left[-2(2x-y)(-1)\right] = -3+(2x-y)^2 + (2x-y)\left[2(2x-y)\right] = -3+(2x-y)^2 + 2(2x-y)^2 = -3+3(2x-y)^2$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(6-6(2x-y)^2,\ -3+3(2x-y)^2\right)$$

Imponiamo $\nabla f(x,y) = (0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 6-6(2x-y)^2 = 0 \\ -3+3(2x-y)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(2x-y)^2 = 6 \\ 3(2x-y)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-y)^2 = 1 \\ (2x-y)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x-y = \pm 1$$

$\Rightarrow$ I punti critici stazionari di f sono tutti i punti delle rette

$2x-y=1$ e $2x-y=-1$

Calcoliamo ora le derivate seconde miste e le derivate seconde pure che ci serviranno per la matrice Hessiana:

- $f_{xx}(x,y) = -12(2x-y)(2) = -24(2x-y)$
- $f_{xy}(x,y) = -12(2x-y)(-1) = 12(2x-y)$
- $f_{yy}(x,y) = 6(2x-y)(-1) = -6(2x-y)$

Si vengono a creare due matrici (e quindi due determinanti):

1) Sia $2x-y=1$, allora si ha:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{vmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 144-144 = 0$$

2) Sia $2x-y=-1$, allora si ha:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = 144-144 = 0$$

Poniamo $t = 2x-y$, ottengo quindi $g(t) = t(3-t^2)$ [abbiamo ottenuto $g(t)$ semplicemente sostituendo $t=2x-y$ nella "traccia dell'esercizio"]

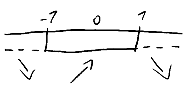
Calcoliamo $g'(t)$:

$$g'(t) = (3-t^2) + t(-2t) = 3-t^2-2t^2 = 3-3t^2$$

Poniamo $g'(t) \geq 0$, si ha:

$$3-3t^2 \geq 0 \xRightarrow{\text{PASSIAMO ALLA EQUAZIONE ASSOCIATA}} 3-3t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

$\Rightarrow -1 \leq t \leq 1$



In $t=1$ è il massimo $\Rightarrow$ I punti della retta $2x-y=1$ sono punti di massimo relativo
In $t=-1$ è il minimo $\Rightarrow$ I punti della retta $2x-y=-1$ sono punti di minimo relativo

$\boxtimes$

Es 4
Determinare i punti di max e min relativo di $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$
Sol
Si ha:
- $f_x(x,y) = -\sin(x^2+y^2)(2x) = -2x\sin(x^2+y^2)$
- $f_y(x,y) = -\sin(x^2+y^2)(2y) = -2y\sin(x^2+y^2)$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(-2x\sin(x^2+y^2), -2y\sin(x^2+y^2)\right)$

Poniamo $\nabla f(x,y)=(0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} -2x\cdot\sin(x^2+y^2)=0 \\ -2y\cdot\sin(x^2+y^2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -2y\cdot\sin(y^2)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin(x^2+y^2)=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sin(y^2)=0 \end{cases} \vee \left\{ \sin(x^2+y^2)=0 \right.$$

Quindi

$$Df(x,y)=(0,0) \iff \sin(x^2+y^2)=0 \iff x^2+y^2=K\pi \qquad K\in\mathbb{Z}$$

Calcoliamo ora le derivate seconde miste e pure:
- $f_{xx}(x,y) = -2\sin(x^2+y^2)+(-2x)\cos(x^2+y^2)(2x) = -2\sin(x^2+y^2)-4x^2\cos(x^2+y^2)$
- $f_{xy}(x,y) = -2x\cos(x^2+y^2)(2y) = -4xy\cos(x^2+y^2)$
- $f_{yy}(x,y) = -2\sin(x^2+y^2)+(-2y)\cos(x^2+y^2)(2y) = -2\sin(x^2+y^2)-4y^2\cos(x^2+y^2)$

Costruiamo la matrice Hessiana:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin(x^2+y^2)-4x^2\cos(x^2+y^2) & -4xy\cos(x^2+y^2) \\ -4xy\cos(x^2+y^2) & -2\sin(x^2+y^2)-4y^2\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_f(x,y) = 4\sin^2(x^2+y^2)+8y^2\cos(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)+8x^2\cos(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)+16x^2y^2\cos^2(x^2+y^2)-16x^2y^2\cos^2(x^2+y^2) = 4\sin^2(x^2+y^2)+8\cos(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)(x^2+y^2)$

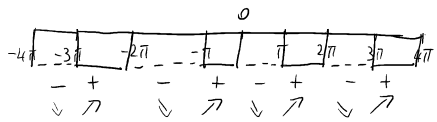
Ora $H_f(P)=0 \quad \forall P$ t.c. $\nabla f(P)=0$

Poniamo $t=x^2+y^2$, otteniamo la funzione $g(t)=\cos(t)$

$\Rightarrow g'(t)=-\sin(t)$

Poniamo $g'(t)\geq 0$

$\Rightarrow -\sin(t)\geq 0 \Rightarrow \sin(t)\leq 0 \Rightarrow \pi+2K\pi\leq t\leq 2\pi+2K\pi$



$\Rightarrow$ I punti di max relativi per f sono dati dai punti della circonferenza $x^2+y^2=2\pi+2K\pi$
I punti di min relativi per f sono dati dai punti della circonferenza $x^2+y^2=\pi+2K\pi$

$\boxtimes$

Es 1

Ultimo esercizio dell'esercitazione precedente

Es 2

Determinare i punti di massimo e minimo di $f(x,y)=x^8-2x^4y+y^3-y$

Sol

Si ha:

- $f_x(x,y)=8x^7-8x^3y$
- $f_y(x,y)=-2x^4+3y^2-1$

$\Rightarrow Df(x,y)=\left(8x^7-8x^3y,\ 3y^2-2x^4-1\right)$

Poniamo $Df(x,y)=(0,0)$, si ha:

$$\begin{cases}8x^7-8x^3y=0\\3y^2-2x^4-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x^3(x^4-y)=0\\3y^2-2x^4-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3(x^4-y)=0\\3y^2-2x^4-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\3y^2-1=0\end{cases}\vee\begin{cases}x^4=y\\3y^2-2y-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\3y^2-1=0\end{cases}\Downarrow\begin{cases}x=0\\3y^2=1\end{cases}\Downarrow\begin{cases}x=0\\y=\pm\frac{1}{\sqrt3}\end{cases}\Rightarrow P_1=\left(0,-\tfrac{1}{\sqrt3}\right),\quad P_2=\left(0,\tfrac{1}{\sqrt3}\right)$$

$$\begin{cases}x^4=y\\3y^2-2y-1=0\end{cases}\Downarrow\begin{cases}x^4=y\\y=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{2\pm4}{6}=\left\langle\begin{array}{l}1\\-\frac13\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Downarrow\quad\begin{cases}x^4=y\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x^4=y\\y=-\frac13\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^4=y\\y=1\end{cases}\Rightarrow P_3=(-1,1),\quad P_4=(1,1)\qquad\begin{cases}x^4=y\\y=-\frac13\end{cases}\Downarrow\ \text{*Niente*}$$

Abbiamo trovato quattro punti:

$P_1=\left(0,-\frac{1}{\sqrt3}\right)$
$P_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt3}\right)$
$P_3=(-1,1)$
$P_4=(1,1)$

Calcoliamo ora le derivate seconde miste e pure:

- $f_{xx}(x,y)=56x^6-24x^2y$
- $f_{xy}(x,y)=-8x^3$
- $f_{yy}(x,y)=6y$

$$\Rightarrow D^2f(x,y)=\begin{pmatrix}56x^6-24x^2y & -8x^3\\-8x^3 & 6y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(P_1)=\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & -2\sqrt3\end{vmatrix}=0-0=0$$

$$H_f(P_2)=\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 2\sqrt3\end{vmatrix}=0-0=0$$

$$H_f(P_3)=\begin{vmatrix}56-24 & 8\\8 & 6\end{vmatrix}=128>0\Rightarrow \text{dato che } a_{11}>0,\ P_3=(-1,1)\ \text{è di minimo}$$

$$H_f(P_4)=\begin{vmatrix}56-24 & -8\\-8 & 6\end{vmatrix}=128>0\Rightarrow \text{dato che } a_{11}>0,\ P_4=(1,1)\ \text{è di minimo}$$

Restano i punti P_1, P_2:

Vediamo cosa succede lungo le rette $x=0$, $y=\frac{1}{\sqrt3}$, $y=-\frac{1}{\sqrt3}$

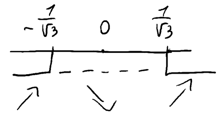
Poniamo:

- $g_1(y)=f(0,y)=y^3-y$
- $g_2\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)=f\left(x,-\frac{1}{\sqrt3}\right)=x^8-2x^4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)=x^8+\frac{2x^4}{\sqrt3}+\frac{2\sqrt3}{9}$

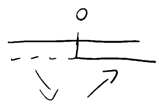
$\cdot\ g_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x^8 - 2x^4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x^8 + \frac{2x^4}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$\cdot\ g_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x^8 - 2x^4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x^8 - \frac{2x^4}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{9}$

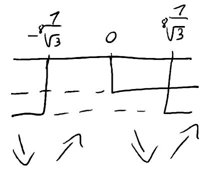
1) $g_1'(y) = 3y^2 - 1 \Rightarrow 3y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 3y^2 \geq 1 \Rightarrow y^2 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$



2) $g_2'(x) = 8x^7 + \frac{8x^3}{\sqrt{3}} \Rightarrow 8x^3\left(x^4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq 0 \Rightarrow$ $x \geq 0$; $x^4 \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ sempre $\Rightarrow x \geq 0$



3) $g_3'(x) = 8x^7 - \frac{8x^3}{\sqrt{3}} \Rightarrow 8x^3\left(x^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq 0 \Rightarrow$ $x \geq 0$; $x^4 \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt[8]{3}} \cup x \geq \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \Rightarrow$



$\Rightarrow P_1, P_2$ sono punti di sella

$\blacksquare$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI. MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Consideriamo due funzioni $f, F \in C^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.

Supponiamo inoltre che $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in A$

Supponiamo che $Z \overset{def}{=} \{(x,y) \in A \mid F(x,y) = 0\} \neq \emptyset$

Vogliamo trovare gli eventuali punti di min e max di f nell'insieme Z.

Un problema di questo tipo è detto problema di estremi condizionati (o vincolati), in quanto le variabili da cui dipende f non sono indipendenti ma sono legate dalla condizione $F(x,y)=0$, anche detta vincolo.

1° caso: Supponiamo per ora che Z sia il sostegno di una curva regolare semplice:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow A$$
$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Per determinare gli estremi di f su Z, basta considerare la funzione di una variabile reale:

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) \qquad \text{con } t \in [a,b]$$

Sia $t_0 \in [a,b]$ un estremo relativo di φ.
Allora, posto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ si ha:

$$\varphi'(t_0) = 0 \implies f_x(x_0,y_0)\cdot x'(t_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot y'(t_0) = 0 \implies \langle Df(x_0,y_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0$$

Geometricamente ciò significa che in corrispondenza di un punto di max o min relativo per f su Z, Df deve essere ortogonale a $\gamma(t)$ (deve essere ortogonale alla curva)

∎

Es 1

Es 1

Calcolare il max per $x, y > 0$ di $f(x,y) = xy$, sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$

SOL

Osserviamo che $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ è parametrizzato da:

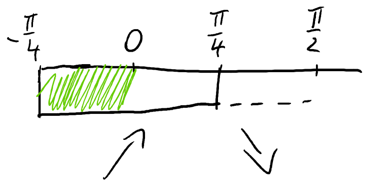
$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Quindi si tratta di determinare il max di $\varphi(t) = \cos(t)\sin(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$

Si ha:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) \cdot 2 = \cos(2t)$$

$$\Rightarrow \cos(2t) \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2t \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$



Ignoriamo la parte < 0 perché per le condizioni iniziali deve essere $x, y > 0$

Il max è a $\frac{\pi}{4}$, per cui:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

∎

Caso generale:

In generale l'insieme Z non è detto che sia il sostegno di una curva semplice.

Tuttavia, sotto opportune ipotesi, Z può essere localmente espresso come grafico di una funzione.

Infatti, supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto generale di Z, ossia $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ oppure $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Infatti, supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto regolare di Z, ossia $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ oppure $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Per il teorema del Dini, in un intorno di y_0 (o di x_0), l'insieme Z è il grafico della funzione $x = g(y)$ (oppure di $y = h(x)$) con la condizione che $x_0 = g(y_0)$ (oppure $y_0 = h(x_0)$).

Supponiamo ad esempio che risulti $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ e quindi Z sia il grafico di $y = h(x)$ in un intorno di (x_0, y_0).

Se x_0 è un estremo relativo di $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, h(x))$, allora risulta che:

$$\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot h'(x_0) = 0$$

Dal teorema del Dini segue anche che:

$$h'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Per cui si ha:

$$f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = 0$$

Allora

$$f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 F_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{dove } \lambda_0 = \frac{f_y(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Inoltre

$$f_y(x_0, y_0) - \lambda_0 F_y(x_0, y_0) = 0$$

e ovviamente $F(x_0, y_0) = 0$

Quindi (x_0, y_0) soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 F_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) - \lambda_0 F_y(x_0, y_0) = 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

nel caso risulti $F(x_0, y_0) \neq 0$, devono valere le stesse relazioni.

<u>TEO</u> (<u>Moltiplicatori di Lagrange</u>):

Se $(x_0, y_0) \in Z$ è un estremo relativo vincolato per f con vincolo F, allora $\exists$ una costante λ_0 t.c. $\nabla f(x_0, y_0) - \lambda_0 \nabla F(x_0, y_0) = 0$

In altre parole, (x_0, y_0) è un punto critico della funzione di tre variabili:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) \stackrel{def}{=} f(x, y) - \lambda F(x, y)$$

Lagrangiana — moltiplicatore di Lagrange

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 F_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) - \lambda_0 F_y(x_0, y_0) = 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \nabla \mathcal{L} = 0$$

In generale, fissati $n, h \in \mathbb{N}$, consideriamo $f, F_1, \dots, F_h$ dove $f, F_1, \dots, F_h \in C^1(\mathbb{R}^{n+h})$ funzioni delle $n+h$ variabili $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h) \in \mathbb{R}^{n+h}$ definite nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{n+h}$.

Sia Z_0 l'insieme dei punti t.c. $F_1(\underline{x}, \underline{y}) = F_2(\underline{x}, \underline{y}) = \dots = F_h(\underline{x}, \underline{y}) = 0$

e tale che la Jacobiana $\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_h)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h)}(\underline{x}, \underline{y})$ abbia rango h

Diremo che f ha un massimo relativo vincolato in (x_0, y_0) con $(x_0, y_0) \in Z_0$, se $\exists$ un intorno I_0 di (x_0, y_0) t.c. $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in Z_0 \cap I_0$

Analogamente per i minimi vincolati

$\blacksquare$

<u>TEO</u>:

Se $(x_0, y_0) \in Z_0$ è un estremo relativo vincolato per f,

con vincoli $F_1, \dots, F_h$ e se la Jacobiana delle F_i ha rango h,

Se $(x_0, y_0) \in Z_0$ è un estremo relativo vincolato per f,
con vincoli $F_1, \dots, F_h$ e se la Jacobiana delle F_i ha rango h,
allora $\exists \, \lambda_1, \dots, \lambda_h \in R$ t.c. $\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda_1 F_1(x,y) - \dots - \lambda_h F_h(x,y)$
abbia gradiente nullo in (x_0, y_0)

$\blacksquare$

Es 1

Data la funzione $f(x,y) = x^2+y^2+\frac{3}{2}x+1$.
Determinare i punti di max e min assoluti sull'insieme $G \stackrel{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2-1=0\}$

Sol

Sfruttiamo la Lagrangiana, si ha:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\frac{3}{2}x+1-\lambda(4x^2+y^2-1)$$

$$\Rightarrow \nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \left(2x+\frac{3}{2}-8\lambda x\ ,\ 2y-2\lambda y\ ,\ -(4x^2+y^2-1)\right)$$

Poniamo $\nabla\mathcal{L} = (0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 2x+\frac{3}{2}x-8\lambda x=0 \\ 2y-2\lambda y=0 \\ 4x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\frac{3}{2}x-8\lambda x=0 \\ 2y(1-\lambda)=0 \begin{matrix} \nearrow \lambda=1 \\ \searrow y=0 \end{matrix} \\ 4x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2x+\frac{3}{2}-8\lambda x=0 \\ 4x^2-1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=1 \\ 2x+\frac{3}{2}-8x=0 \\ 4x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$2x+\frac{3}{2}-8x=0 \to 6x=\frac{3}{2} \to x=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x+\frac{3}{2}-8\lambda x=0 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda=1 \\ x=\frac{1}{4} \\ 4\cdot\frac{1}{16}+y^2-1=0 \end{cases}$$

$4\cdot\frac{1}{16}+y^2-1=0 \to y^2+\frac{1}{4}-1=0 \to y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \to y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_1=\left(-\frac{1}{2},0\right) \quad P_2=\left(\frac{1}{2},0\right) \quad P_3=\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad P_4=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ora si ha:

$f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{2}$

$f(P_2) = f\left(\frac{1}{2},0\right) = 2$

$f(P_3) = f\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{35}{16}$

$f(P_4) = f\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{35}{16}$

$\Rightarrow$ I punti di max sono P_3, P_4
Il punto di min è P_1

■

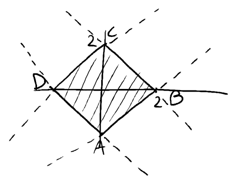
Es 1

Trovare max e min assoluti di $f(x,y) = x^2 + 3xy + y$ nel quadrato $|x| + |y| \leq 2$

Sol

Rappresentiamo il quadrato:

- Se $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y \leq 2$ BC
- Se $x \geq 0, y \leq 0 \Rightarrow x - y \leq 2$ AB
- Se $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow -x - y \leq 2$ AD
- Se $x \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow -x + y \leq 2$ DC



Calcoliamo ora le derivate parziali di $f(x,y)$:

- $f_x(x,y) = 2x + 3y$
- $f_y(x,y) = 3x + 1$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x + 3y, 3x + 1)$

Imponiamo $\nabla f = (0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} + 3y = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$

Calcoliamo ora le derivate seconde miste e pure:

- $f_{xx}(x,y) = 2$
- $f_{xy}(x,y) = 3$
- $f_{yy}(x,y) = 0$

Costruiamo la matrice Hessiana:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante Hessiano:

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9 \quad < 0$$

$\Rightarrow P$ punto di sella

Non abbiamo punti di max o min, ma noi siamo sicuri che esistono perché il nostro "quadrato" è un compatto, per Weierstrass tali punti sono da ricercarsi nella parte interna o nel bordo.

Per cui:

LATO AB:

Costruiamo la Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 3xy + y - \lambda(x - y - 2)$$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L} = \left(2x+3y-\lambda,\ 3x+1+\lambda,\ -(x-y-2)\right)$

Imponiamo $\nabla \mathcal{L} = (0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 2x+3y-\lambda=0 \\ 3x+1+\lambda=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ 3x+1+2x+3y=0 \\ x=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ 5x+1+3y=0 \\ x=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ 5(y+2)+1+3y=0 \\ x=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ x=y+2 \\ 5y+10+1+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ x=y+2 \\ y=-\frac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+ \\ y=-\frac{11}{8} \\ x=-\frac{11}{8} \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto $P_1=\left(\frac{5}{8}, -\frac{11}{8}\right)$

LATO BC:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+3xy+y-\lambda(x+y-2)$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L} = \left(2x+3y-\lambda,\ 3x+1-\lambda,\ -(x+y-2)\right)$

Imponiamo $\nabla \mathcal{L} = (0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 2x+3y-\lambda=0 \\ 3x+1-\lambda=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ 3x+1-2x-3y=0 \\ x=2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ x-3y+1=0 \\ x=2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ 2-y-3y+1=0 \\ x=2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2x+3y \\ -4y+3=0 \to y=\frac{3}{4} \\ x=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4} \end{cases}$$

Abbiamo trovato $P_2=\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

LATO CD:

Si ha:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+3xy+y-\lambda(-x+y-2)$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L} = \left(2x+3y+\lambda,\ 3x+1-\lambda,\ -(-x+y-2)\right)$

Imponiamo $\nabla \mathcal{L} = (0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 2x+3y+\lambda=0 \\ 3x+1-\lambda=0 \\ -x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ 3x+1+2x+3y=0 \\ x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ 5x+3y+1=0 \\ x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ 5y-10+3y+1=0 \\ x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x+3y \\ y=\frac{9}{8} \\ x=\frac{9}{8}-2=-\frac{7}{8} \end{cases}$$

Abbiamo trovato $P_3=\left(-\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right)$

LATO DA:

Si ha:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+3xy+y-\lambda(-x-y-2)$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L} = \left(2x+3y+\lambda,\ 3x+1+\lambda,\ -(-x-y-2)\right)$

Imponiamo $\nabla \mathcal{L} = (0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 2x+3y+\lambda=0 \\ 3x+1+\lambda=0 \\ -x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ 3x+1-2x-3y=0 \\ x=-y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ x-3y+1=0 \\ x=-y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ -y-2-3y+1=0 \\ x=-y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x-3y \\ y=-\frac{1}{4} \\ x=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

Abbiamo trovato $P_4=\left(-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Ricapitolando, si ha che:

$P_1=\left(\frac{5}{8}, -\frac{11}{8}\right)$ $\quad Q_1=(0,-2)$

$P_2=\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\quad Q_2=(2,0)$ $\Big\}$ Sono i punti

$3y$

$+2 = \frac{5}{8}$

$P_1 = \left(\frac{5}{8}, -\frac{11}{8}\right)$ $\qquad Q_1 = (0, -2)$

$P_2 = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\qquad Q_2 = (2, 0)$

$P_3 = \left(-\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right)$ $\qquad Q_3 = (0, 2)$

$P_4 = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ $\qquad Q_4 = (-2, 0)$

Sono i punti ai vertici del quadrato.

Si ha che:

$f(P_1) = -\frac{57}{16}$

$f(P_2) = \frac{41}{8}$

$f(P_3) = -\frac{17}{16}$

$f(P_4) = \frac{33}{8}$

$f(Q_1) = -2$

$f(Q_2) = 4$

$f(Q_3) = 2$

$f(Q_4) = 4$

Per cui:

- P_1 punto di min assoluto
- P_2 punto di max assoluto

▨

Es 2

Studiare i punti stazionari di $f(x,y) = x^4 + y^4$

Sol

Calcoliamo le derivate parziali:

- $f_x(x,y) = 4x^3$
- $f_y(x,y) = 4y^3$

$\Rightarrow \nabla f = (4x^3, 4y^3)$

Imponiamo $\nabla f = (0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto $P = (0,0)$

Calcoliamo le derivate seconde miste e pure:

- $f_{xx}(x,y) = 12x^2$
- $f_{xy}(x,y) = 0$
- $f_{yy}(x,y) = 12y^2$

Costruiamo la matrice Hessiana:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamone il determinante:

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144\,x^2y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow H_f(P) = H_f(0,0) = 0$$

Inoltre si ha che $f(P) = f(0,0) = 0$

Risulta anche che:

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow f(x,y) \geq f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P$ è punto di min assoluto e $\nexists$ max assoluto

Es 3

Classificare i punti stazionari di $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

Sol

Si ha:

- $f_x = 4x^3 - 4x + 4y$
- $f_y = 4y^3 + 4x - 4y$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x + 4y,\ 4y^3 + 4x - 4y)$

Imponiamo $\nabla f = (0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{sommando 1ª a 2ª equazione}} \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = -x^3 \to y = -x \\ -4x^3 + 4x + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -4x^3 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x^3 - 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x(x^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$4x(x^2-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$

$$\Downarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = +\sqrt{2} \end{cases}$$

Abbiamo trovato tre punti:

$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$P_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Calcoliamo le derivate seconde miste e pure:

- $f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$
- $f_{xy}(x,y) = 4$
- $f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$

$$\Rightarrow D^2 f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante Hessiano nei punti P_1, P_2, P_3:

$$H_f(P_1) = H_f(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$H_f(P_2) = H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0 \Rightarrow$ dato che $a_{11} > 0 \Rightarrow P_2$ è di min relativo

$H_f(P_3) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0 \Rightarrow$ dato che $a_{11} > 0 \Rightarrow P_3$ è di min relativo

Resta da stabilire P_1:

Notiamo che:

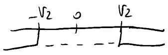
$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$$

Possiamo studiare diversi casi:

• Se $y=0$, si ha

$$f(x,0) - f(0,0) = f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2)$$

e si ha che $f(x,0) \geq 0$ se $x^2(x^2-2) \geq 0$, ossia $\begin{cases} x^2 \geq 0 \to \text{sempre} \\ x^2 \geq 2 \to x < -\sqrt{2} \cup x > \sqrt{2} \end{cases}$



Per cui se $y=0$, $\exists$ un intorno $I=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ di $x=0$ in cui $f(0,0) \geq f(x,0)$, cioè dove P_1 è di max relativo

• Se $y=x$, si ha:

$$f(x,x) - f(0,0) = f(x,x) = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = x^4 + y^4$$

e si ha che $f(x,x) \geq 0$ sempre, cioè P_1 è di min relativo

Ma allora P_1 è punto di sella

∎

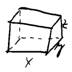
Problemi con estremi vincolati

Es 1

Tra tutti i parallelepipedi che hanno somma degli spigoli fissata, trovare quello di volume massimo

Sol

formula del volume — vincolo



Siano $f(x,y,z) = xyz$ e $F(x,y,z) = x+y+z-K$

Calcoliamo la Lagrangiana:

$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x+y+z-K)$

Si ha:

$\nabla \mathcal{L} = \left(yz-\lambda,\ xz-\lambda,\ xy-\lambda,\ -(x+y+z-K)\right)$

Imponiamo $\nabla \mathcal{L} = (0,0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} yz-\lambda=0 \\ xz-\lambda=0 \\ xy-\lambda=0 \\ x+y+z-K=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=yz \\ \lambda=xz \\ \lambda=xy \\ x+y+z-K=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xz=yz \\ xz=xy \\ \lambda=xy \\ x+y+z=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=y \\ \lambda=xy \\ x+y+z=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+x+x=K \to 3x=K \to x=\frac{K}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{K}{3} \\ y=\frac{K}{3} \\ z=\frac{K}{3} \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto $P = \left(\frac{K}{3}, \frac{K}{3}, \frac{K}{3}\right)$

Restringiamoci alle prime due coordinate. I valori di x, y, z devono soddisfare le seguenti condizioni:

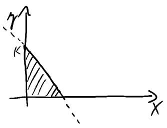
- $x, y, z \geq 0$
- $x+y+z = K$

Si ha che:

$z = K-x-y$

e deve essere $z \geq 0$, cioè $K-x-y \geq 0 \Rightarrow K \geq x+y$ (da cui l'equazione della retta $y \leq -x+K$)

Dunque i valori di x, y variano nel seguente dominio:



Chiamiamo T tale dominio.

Si ha:

$f(x,y,z) = 0$ sul bordo di T

e $f(x,y,z) \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in R^3$

Ora, f è continua sul compatto T, perciò siamo sicuri che max e min assoluti esistono.

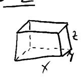
Poiché f si annulla sul bordo di T, allora il max assoluto è raggiunto in $\mathring{T}$ (parte interna)

Es 2

Una scatola a forma di parallelepipedo ha la superficie totale assegnata.

Determinare il massimo volume possibile

Sol



Siano $f(x,y,z) = xyz$

$F(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz - K$

In modo equivalente si ha $F(x,y,z) = xy + xz + yz - K$

Calcoliamo la Lagrangiana:

$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(xy+xz+yz-K)$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L} = \left(yz - \lambda y - \lambda z,\ xz - \lambda x - \lambda z,\ xy - \lambda x - \lambda y,\ -(xy+xz+yz-K)\right)$

Imponiamo $\nabla \mathcal{L} = (0,0,0,0)$, si ha:

$$\begin{cases} yz-\lambda z-\lambda y=0 \\ xz-\lambda z-\lambda x=0 \\ xy-\lambda x-\lambda y=0 \\ xz+yz+xy=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-z)(z-\lambda)=0 \\ xz-\lambda z-\lambda x=0 \\ xy-\lambda x-\lambda y=0 \\ xz+yz+xy=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ xz-\lambda(z+x)=0 \\ x^2-\lambda x-\lambda x=0 \\ xz+xz+xy=K \end{cases} \vee \begin{cases} z=\lambda \\ \lambda x-\lambda^2-\lambda x=0 \to \lambda=0 \Rightarrow z=0 \\ \text{Non ha senso continuare questo sistema} \\ \text{perché non dà punti di max, infatti } z=0 \text{ annulla tutto.} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y=x \\ xz-\lambda(x+z)=0 \\ x(x-2\lambda)=0 \\ 2xz+xy=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ xz-\lambda(x+z)=0 \\ x=2\lambda \\ 2xz+x^2=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x=2\lambda \\ x=2\lambda \\ 2\lambda z-\lambda(2\lambda+z)=0 \\ 4\lambda z+4\lambda^2=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=2\lambda \\ 2z-2\lambda-z=0 \to z=2\lambda \\ 8\lambda^2+4\lambda^2=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=z=\sqrt{\frac{K}{3}} \\ \lambda=\sqrt{\frac{K}{12}}=\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Abbiamo trovato $P=\left(\sqrt{\frac{K}{3}}, \sqrt{\frac{K}{3}}, \sqrt{\frac{K}{3}}\right)$

▨

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Ricordiamo che se abbiamo $y'=a(x)y+b(x)$ e posto $A(x)=\int a(x)\,dx$, allora si ha che:

$$y(x)=e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)\,dx$$

Es 1

Risolvere $y'=\frac{x}{x^2+1}y$

Sol

Si ha che:

$a(x)=\frac{x}{1+x^2}$

$b(x)=0$

$\Rightarrow A(x)=\int a(x)dx=\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$

Dunque si ha:

$$y(x)=e^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)}\int e^{-\frac{1}{2}\log(x^2+1)}\cdot 0\,dx=\sqrt{x^2+1}\cdot c = c\sqrt{x^2+1}$$

▨

Es 2

Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$(P.C.)\begin{cases} y'=\frac{1-y}{x} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

Sol

Scriviamo $y'=\frac{1-y}{x}$ nella seguente forma:

$$y'=\frac{1-y}{x}=\frac{1}{x}-\frac{y}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}y$$

Abbiamo che:

$a(x)=-\frac{1}{x}$

$b(x)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow A(x)=\int a(x)\,dx=\int -\frac{1}{x}dx=-\int\frac{1}{x}dx=-\log|x|$

Per cui:

$$y(x)=e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)\,dx=e^{-\log(x)}\int e^{\log(x)}\frac{1}{x}dx = x^{-1}\int x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{x}\cdot\int 1\,dx = \frac{1}{x}\cdot(x+c) = 1+\frac{c}{x}$$

Dobbiamo trovare c, sappiamo che $y(1)=0$, per cui:

Se $y(x)=1+\frac{c}{x} \Rightarrow y(1)=1+\frac{c}{1}=1+c$

Se deve essere $y(1)=0 \Rightarrow 1+c=0 \Rightarrow c=-1$

In conclusione:

$$y(x)=1-\frac{1}{x}$$

▨

Es 3

Risolvere:

a) $y'' - 6y' + 5y = 0$

b) $y'' - 2y' + 2y = 0$

c) $y'' - 2y' + y = 0$

Sol

a): Scriviamo l'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{array}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono date da:

- $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{1x} = e^x$
- $y_2(x) = e^{\lambda_2 \cdot x} = e^{5x}$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

b): Scriviamoci l'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Notiamo che $\Delta < 0$, allora dobbiamo risolvere nel caso complesso:

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{-4}{(2)^2}} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i = \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

In questo caso abbiamo che:

- $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
- $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

dove α, β si ricavano da: $\alpha \pm i\beta$

Per cui, nel caso generale si ha:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \overset{\text{NEL NOSTRO CASO } \alpha=1,\ \beta=1}{=} c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x)$$

c): L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Le due soluzioni coincidono, in questo caso si ha che:

- $y_1(x) = e^{\lambda x}$
- $y_2(x) = x e^{\lambda x}$

La soluzione generale è data da:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Es 4

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$(P.C.) \begin{cases} y'' - 2y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

SoL

Scriviamo l'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \quad \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} \\ \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Si ha che:

- $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$
- $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x}$$

Ora, deve essere $y(0)=0$ e $y'(0) = 2\sqrt{2}$, si ha:

- Calcoliamo, prima di impostare il sistema, $y'(x)$:

$$y'(x) = C_1 \cdot e^{(1-\sqrt{2})x} \cdot (1-\sqrt{2}) + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} (1+\sqrt{2})$$

Imponiamo ora il sistema:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = C_1(1-\sqrt{2}) + C_2(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1(1-\sqrt{2}) + C_2(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -C_2(1-\sqrt{2}) + C_2(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -C_2 + C_2\sqrt{2} + C_2 + C_2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 2C_2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

In conclusione:

$$y(x) = 1 \cdot e^{(1-\sqrt{2})x} + (-1)\, e^{(1+\sqrt{2})x} = e^{(1-\sqrt{2})x} - e^{(1+\sqrt{2})x}$$

$\blacksquare$

Esercitazione 34

martedì 18 gennaio 2022 16:29

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON OMOGENEE DEL II ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

Se $f(x)$ è del tipo:

- $e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, Q(x)$

oppure

- $e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, Q(x)$

Possiamo distinguere due casi:

1): Se $\alpha \pm i\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica, allora cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(x) = x\, e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) P_1(x) + \sin(\beta x) P_2(x)\right]$$

dove P_1, P_2 sono polinomi dello stesso grado di Q

2) Se $\alpha \pm i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) P_1(x) + \sin(\beta x) P_2(x)\right]$$

dove P_1, P_2 sono polinomi dello stesso grado di Q

Es 1

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

Sol

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Passiamo all'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}$$

Allora:

- $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x$
- $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$

Per cui la soluzione generale è:

$$\overline{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Ora dobbiamo cercare una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Allora:

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y_p''(x) = 6ax + 2b$$

Deve risultare che:

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = 2x^3 - x^2 + 1$$

cioè

$$6ax + 2b - 9ax^2 - 6bx - 3c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = 2x^3 - x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2ax^3 + (2b - 9a)x^2 + (6a - 6b + 2c)x + 2b - 3c + 2d = 2x^3 - x^2 + 1$$

Da cui si ha:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 9a = -1 \\ 6a - 6b + 2c = 0 \\ 2b - 3c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b - 9 = -1 \to b = 4 \\ 6 - 24 + 2c = 0 \to c = 9 \\ 8 - 27 + 2d = 1 \to d = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 9 \\ d = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$$

In conclusione si ha che la soluzione generale è:

$\Rightarrow y_p(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$

In conclusione si ha che la soluzione generale è:

$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + x^3 + 4x^2 + 9x + 10$

$\blacksquare$

In generale si procede così:

Data l'equazione differenziale del secondo ordine non omogenea:

$y'' + a y' + b y = p(x)$

La soluzione si trova sommando due soluzioni particolari:

- $\bar{y}(x)$
- $y_p(x)$

$\Rightarrow y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x)$

Il problema principale sta nel trovare $y_p(x)$, dato che $\bar{y}(x)$ è la soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine omogenea associata.

· Come si trova $y_p(x)$?

Si hanno 3 casi:

1) $p(x)$ è un polinomio di grado n

dove A è un numero

2) $p(x)$ è una funzione del tipo esponenziale, cioè $p(x) = A \cdot e^{\alpha x}$

dove C e D sono numeri

3) $p(x)$ è una funzione di tipo goniometrico, cioè $p(x) = C \cdot \sin(\beta x) + D \cos(\beta x)$

Analizziamo ora i vari casi uno ad uno:

1° CASO: $p(x)$ è un polinomio di grado n:

Dal primo caso si sviluppano 3 casi possibili:

A) Se $b \neq 0 \Rightarrow y_p(x)$ è un polinomio di grado $n \Rightarrow y_p(x) = a x^n + b x^{n-1} + \ldots + c x^1 + d$

B) Se $b = 0, a \neq 0 \Rightarrow y_p(x)$ è un polinomio di grado $n+1 \Rightarrow y_p(x) = a x^{n+1} + b x^n + \ldots + c x^1 + d$

C) Se $b = 0$ e $a = 0 \Rightarrow y_p(x)$ è un polinomio di grado $n+2 \Rightarrow y_p(x) = a x^{n+2} + b x^{n+1} + \ldots + c x + d$

ATTENZIONE

Gli a, b NON sono gli stessi dell'equazione differenziale di partenza

2° CASO: $p(x)$ è una funzione di tipo esponenziale, $p(x) = A e^{\alpha x}$:

Anche in questo caso si possono distinguere 3 sottocasi:

A) Se α non è una radice dell'equazione caratteristica $\Rightarrow y_p(x) = B e^{\alpha x}$

B) Se α è una radice dell'equazione caratteristica $(\Delta > 0) \Rightarrow y_p(x) = B x e^{\alpha x}$

C) Se α è una radice doppia dell'equazione caratteristica $(\Delta = 0) \Rightarrow y_p(x) = B x^2 e^{\alpha x}$

Il problema in questo 2° CASO è determinare il valore di B, come si fa? Vediamo un esempio:

Esempio:

Sia $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$ [Notiamo che $\alpha = -2$]

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}$

Ora α è soluzione, infatti $\alpha = -2 = \lambda_1$ e $\Delta > 0$, siamo nel caso B:

Scegliamo $y_p(x) = B x e^{-2x}$, deriviamo due volte:

- $y_p'(x) = B e^{-2x} + B x e^{-2x}(-2) = B e^{-2x} - 2Bx e^{-2x}$
- $y_p''(x) = B e^{-2x}(-2) + (-2B e^{-2x} + -2Bx e^{-2x}(-2)) = -2B e^{-2x} - 2B e^{-2x} + 4Bx e^{-2x} = -4B e^{-2x} + 4Bx e^{-2x}$

Si ha che deve essere $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$, da cui:

$$\underbrace{-4B e^{-2x} + \cancel{4Bx e^{-2x}}}_{= y_p''(x)} + \underbrace{B e^{-2x} - \cancel{2Bx e^{-2x}}}_{= y_p'(x)} \cancel{-2} \underbrace{\cancel{Bx e^{-2x}}}_{= y_p(x)} = 3e^{-2x}$$

Il "-2" lo avevamo nella traccia

$\Rightarrow -3B e^{-2x} = 3 e^{-2x} \Rightarrow B = -1$

$\Rightarrow y_p(x) = Bx e^{-2x} = -x e^{-2x}$

SALTIAMO I PASSAGGI TANTO È FACILE

Resta da ricavare $\bar{y}(x) = \ldots = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

In conclusione

SALTIAMO I PASSAGGI TANTO È FACILE

Resta da ricavare $\bar{y}(x) = \dots = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

In conclusione

$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + (-x\, e^{-2x}) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - x\, e^{-2x}$

3°CASO : $p(x)$ è una funzione di tipo goniometrico, $p(x) = C \sin(\beta x) + D\cos(\beta x)$:

In questo 3° CASO si distinguono 2 sottocasi:

A) Se $i\beta$ non è radice della equazione caratteristica $\Rightarrow y_p(x) = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$

Questi $i\beta$ compaiono quando $\Delta < 0$, se $\Delta = 0$ oppure $\Delta > 0 \Rightarrow \beta = 0$

B) Se $i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica $\Rightarrow y_p(x) = x\,(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x))$

Anche in questo 3° CASO uno dei problemi da affrontare è quello di trovare A e B, per trovarli si procede allo stesso modo del 2° CASO.

Esempio: Sia $y'' + 4y = \sin(2x)$. [Notiamo che $\beta = 2$]

Si ha che:

$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i = 2i$

$\Rightarrow i\beta = i2 = 2i$ è soluzione dell'equazione caratteristica

$\Rightarrow$ Siamo nel caso (B) $\Rightarrow y_p(x) = x\,(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)) = x\,(A\sin(2x) + B\cos(2x)) = Ax\sin(2x) + Bx\cos(2x)$

Deriviamo due volte:

- $y_p'(x) = A\sin(2x) + Ax\cos(2x)(2) + B\cos(2x) + Bx(-\sin(2x))(2) = A\sin(2x) + 2Ax\cos(2x) + B\cos(2x) - 2Bx\sin(2x)$
- $y_p''(x) = A\cos(2x)(2) + 2A\cos(2x) + 2Ax(-\sin(2x))(2) + B(-\sin(2x))(2) + (-2B\sin(2x) + (-2Bx)\cos(2x)(2)) = 2A\cos(2x) + 2A\cos(2x) - 4Ax\sin(2x) - 2B\sin(2x) - 2B\sin(2x) - 4B$

Ora abbiamo tutto, non ci resta che sostituire:

Sappiamo che deve essere $y'' + 4y = \sin(2x)$, da cui:

$$\Rightarrow \underbrace{4A\cos(2x) - \cancel{4Ax\sin(2x)} - 4B\sin(2x) - \cancel{4Bx\cos(2x)}}_{= y_p''(x)} + \underbrace{\cancel{4Ax\sin(2x)} + 4Bx\cos(2x)}_{= y_p(x)} = \sin(2x)$$

$\Rightarrow 4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) = \sin(2x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 0 \\ -4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x) = x\left(-\frac{1}{4}\cos(2x)\right) = -\frac{1}{4}x\cos(2x)$

Dopo aver trovato $\bar{y}(x)$, si ha la soluzione finale:

$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = \dots - \frac{1}{4}x\cos(2x) = c_1\cos(2x) - c_2\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x)$

Es 2

Risolvere:

a) $y'' - 4y' = x^2 + 1$

b) $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$

c) $y'' - 2y' - 3y = \cos(2x)$

d) $y'' + y' = 5x + 2e^{x}$

Sol

a) Sia $y'' - 4y' = x^2 + 1$

Si che:

$y'' - 4y' = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 4) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{y}(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{4x} = c_1 + c_2 e^{4x}$

Dobbiamo ora trovare $y_p(x)$:

$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y_p''(x) = 6ax + 2b$

$\Rightarrow$

$6ax + 2b - 12ax^2 - 8bx - 4c = x^2 + 1$

$$x\cos(2x) = 4A\cos(2x) - 4Ax\sin(2x) - 4B\sin(2x) - 4Bx\cos(2x)$$

$y_p''(x) = 6ax + 2b$

$\Rightarrow$
$6ax + 2b - 12ax^2 - 8bx - 4C = x^2+1$

$\Rightarrow -12ax^2 + (6a - 8b)x + 2b - 4C = x^2+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12a = 1 \\ 6a - 8b = 0 \\ 2b - 4C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} - 8b = 0 \to b = -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} - 4C = 1 \to 4C = -\frac{1}{8} - 1 = \frac{-1-8}{8} = -\frac{9}{8} \Rightarrow C = -\frac{9}{32} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{32}x$

In conclusione

$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{32}x$

b): Sia $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$

Si ha:

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}$

$\Rightarrow \bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

Dobbiamo trovare $y_p(x)$:

Sia $y_p(x) = Bxe^{\alpha x} = Bxe^{3x}$

$\Rightarrow y_p'(x) = Be^{3x} + Bxe^{3x}(3) = Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$

$y_p''(x) = Be^{3x}(3) + 3Be^{3x} + 3Bxe^{3x}(3) = 3Be^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x} = 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$

Deve essere che:

$6Be^{3x} + 9Bxe^{3x} - 2Be^{3x} - 6Bxe^{3x} - 3Bxe^{3x} = 8e^{3x}$

$\Rightarrow 4Be^{3x} = 8e^{3x} \Rightarrow B = 2$

$\Rightarrow y_p(x) = Bxe^{3x} = 2xe^{3x}$

In conclusione:

$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + 2xe^{3x}$

c): Sia $y'' - 2y' - 3y = \cos(2x)$

Si ha:

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}$

$\Rightarrow \bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

Dobbiamo trovare $y_p(x)$:

Si ha $y_p(x) = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$

Dove $\beta = 2$ (Lo sappiamo dalla traccia: $y'' - 2y' - 3y = \cos(\overset{\beta}{2}x)$)

$\Rightarrow y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$

$\Rightarrow y_p'(x) = A\cos(2x)(2) + B(-\sin(2x))(2) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$

$y_p''(x) = 2A(-\sin(2x))(2) - 2B\cos(2x)(2) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$

Per cui deve essere che:

$-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) - 4A\cos(2x) + 4B\sin(2x) - 3A\sin(2x) - 3B\cos(2x) = \cos(2x)$

$\Rightarrow -7A\sin(2x) - 7B\cos(2x) - 4A\cos(2x) + 4B\sin(2x) = \cos(2x)$

$\sin(2x)(-7A + 4B) + \cos(2x)(-7B - 4A) = \cos(2x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7B - 4A = 1 \\ -7A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7B - 4A = 1 \\ 4B = 7A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{49}{4}A - 4A = 1 \\ B = \frac{7}{4}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-49-16}{4}A = 1 \\ B = \frac{7}{4}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{65}{4}A = 1 \to A = -\frac{4}{65} \\ B = -\frac{7}{..} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7B-4A=1 \\ -7A+4B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7B-4A=1 \\ 4B=7A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{49}{4}A-4A=1 \\ B=\frac{7}{4}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-49-16}{4}A=1 \\ B=\frac{7}{4}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{65}{4}A=1 \to A=-\frac{4}{65} \\ B=-\frac{7}{65} \end{cases}$$

Allora

$$y_p(x) = -\frac{4}{65}\sin(2x) - \frac{7}{65}\cos(2x)$$

In conclusione:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{4}{65}\sin(2x) - \frac{7}{65}\cos(2x)$$

d): Sia $y'' + y' = 5x + 2e^x$

Si ha:

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2$$

Dobbiamo trovare $y_p(x)$:

Sia $y_p(x) = ax^2 + bx + c + Be^x$

$$\Rightarrow y_p'(x) = 2ax + b + Be^x$$

$$y_p''(x) = 2a + Be^x$$

Deve risultare che:

$$2a + Be^x + 2ax + b + Be^x = 5x + 2e^x$$

$$\Rightarrow 2ax + 2Be^x + 2a + b = 5x + 2e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 5 \\ 2B = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ B = 1 \\ 5 + b = 0 \to b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$$

In conclusione:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$$

EQUAZIONI DI BERNOULLI

Si dice equazione di Bernoulli una equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo:

$$y'(x) = a(x)\, y + b(x)\, y^{\alpha}$$

dove $a(x)$, $b(x)$ sono funzioni continue in un intervallo $[c, d]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Osserviamo che se $\alpha > 1$, allora $y \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.

Posto $y \neq 0$, possiamo dividere entrambi i membri per y^{α}:

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}} = a(x)\, y^{1-\alpha} + b(x)$$

Ponendo $z(x) = y^{1-\alpha}$ si ottiene:

$$z'(x) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} \cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = (1-\alpha)\, \frac{y'}{y^{\alpha}}$$

Allora si ha:

$$\frac{z'(x)}{(1-\alpha)} = \frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z'(x)}{1-\alpha} = a(x)\, z + b(x)$$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = (1-\alpha)\, a(x)\, z + (1-\alpha)\, b(x)$$

che è una equazione lineare del I ordine.

Da ciò si ricavano le soluzioni dell'equazione di partenza.

Es 1

Risolvere $y' = 2y - e^x y^2$

SOL

Osserviamo che $\alpha = 2 > 0 \Rightarrow y \equiv 0$ è soluzione.

Consideriamo $y > 0$, dividiamo tutto per y^2:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2y}{y^2} - e^x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{2}{y} - e^x$$

Poniamo $z(x) = \frac{1}{y(x)}$, si ha:

$$z'(x) = -\frac{1}{y^2(x)} \cdot y' \Rightarrow -z'(x) = \frac{y'}{y^2(x)}$$

$$\Rightarrow -z'(x) = 2 \cdot z(x) - e^x \Rightarrow z'(x) = -2z + e^x$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-2x} \int e^{2x} \cdot e^x \, dx = e^{-2x} \int e^{3x} \, dx = e^{-2x}\left(\frac{1}{3} e^{3x} + c\right) = \frac{1}{3} e^x + c e^{-2x}$$

Dunque, in conclusione:

$$y(x) = \left(\frac{1}{3} e^x + c e^{-2x}\right)^{-1} \cup y \equiv 0$$

eleviamo a -1 perché la soluzione è $z(x) = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} = z^{-1}$

EQUAZIONI LINEARI DI EULERO

Si chiamano equazioni di Eulero, le equazioni differenziali lineari del tipo:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Tale equazione considerata nell'intervallo $(0,+\infty)$ [oppure nell'intervallo $(-\infty,0)$] si riconduce ad una equazione a coefficienti costanti con la sostituzione $x = e^t$ [oppure $x = -e^t$]

In altre parole, si pone $t = \log|x|$

$\blacksquare$

Es 2

Risolvere

$$x^2 y'' + p x y' + q y = f(x)$$

Sol

Per $x>0$ poniamo $x = e^t$. $\rightsquigarrow$ $t = \log|x|$

Allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sostituendo:

$$-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (p-1)\frac{\partial y}{\partial t} + q y = f(e^t)$$

Da ciò segue la soluzione

$\boxed{}$

Es 3

Risolvere:

$$x^2 y'' + 2x y' - 2y = x^2$$

Sol

Ponendo $x = e^t$ si ha:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Allora, sostituendo:

$$-\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial y}{\partial t} - 2y = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t} - 2y = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$$

$\Rightarrow \quad \bar{y}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$

Una soluzione particolare della forma $y_p(t) = a e^{2t}$ è data da:

$$a = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \quad y_p(t) = \frac{1}{4} e^{2t}$

Dunque la soluzione generale è:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + \frac{1}{4} e^{2t}$$

Ponendo $t = \log|x|$ si ha:

$$y(x) = c_1 e^{-2\log|x|} + c_2 e^{\log|x|} + \frac{1}{4} e^{2\log|x|} = c_1 x^{-2} + c_2 x + \frac{1}{4} x^2$$

$\blacksquare$